PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 1
Strani 56–60

Damjan Kobal:

# KOTNE FUNKCIJE

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/869-Kobal.pdf

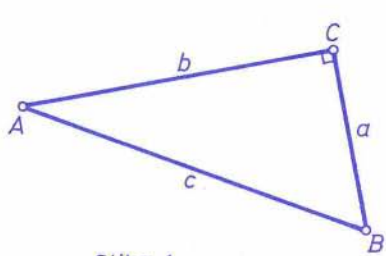
## KOTNE FUNKCIJE

Ali bi znali ugotoviti, kako visok je tovarniški dimnik, ki ga vidite vsak dan? Ali kako visoka je stolpnica, ali svetilka javne razsvetljave, ali drevo, ali.. In še mnogo podobnih vprašanj si lahko zastavimo. Odgovor nanje pa utegne biti zanimiv in preprost.

Poskusimo skupaj spoznati *kotne funkcije* in, nenazadnje, odgovoriti na postavljena vprašanja.

Začnimo skupna razmišljanja s ponovitvijo pojmov, ki jih srečamo ob pravokotnem trikotniku.

Pravokotni trikotnik je trikotnik, ki ima en pravi kot ($90^0$). Najdaljšo stranico v pravokotnem trikotniku, ki vselej leži nasproti pravemu kotu, imenujemo *hipotenuza.* Drugi dve sta *kateti.* Na sliki 1 smo kateti označili z $a$, $b$, hipotenuzo pa s $c$. Poznamo tudi Pitagorov izrek: $a^2 + b^2 = c^2$. (Kvadrat hipotenuze je enak vsoti kvadratov obeh katet.)




Slika 1

Spomnimo se, da sta si dva pravokotna trikotnika podobna, če imata en ostri kot enak. Ker sta pravokotna, imata enaka dva kota, to pa že pomeni, da sta si podobna.

Sedaj pa narišimo vsak svoj pravokotni trikotnik, ki bo imel en kot enak $\delta = 30^0$. Seveda je takih trikotnikov veliko, izberite si svojega (tistega, ki vam je najbolj všeč). Važno je le, da je pravokoten in da eden izmed ostrih kotov meri $30^0$. Kot smo označili z $\delta$ prav zato, da ostane izbira, v katero ogljišče ga postavite, vaša. Sedaj pa pazljivo!

Izračunajte količnik med dolžino nasproti kota $\delta = 30^0$ ležeče katete in dolžino hipotenuze. Torej:

$$\frac{\text{dolžina katete nasproti } \delta}{\text{dolžina hipotenuze}}$$

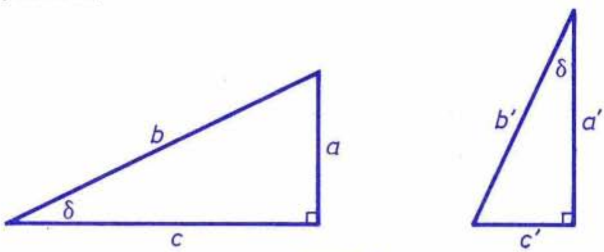
Če ste lepo risali in prav računali, sta dobili $\frac{1}{2}$. Najbrž ni težko uganiti, kako smo lahko uganili vaš količnik, čeprav vemo o vašem pravokotnem trikotniku le to, da eden od kotov meri $30^0$. Izračunajte še naslednje količnike:

$$\frac{\text{dolžina katete, priležne kotu } \delta}{\text{dolžina hipotenuze}}$$

$$\frac{\text{dolžina katete nasproti } \delta}{\text{dolžina katete, priležne kotu } \delta}$$

$$\frac{\text{dolžina katete, priležne kotu } \delta}{\text{dolžina katete nasproti } \delta}$$

Dobili smo po vrsti: 0.9, 0.6, 1.7 (približno seveda!). Če bi bili bolj natančni: 0.866.., 0.577.., 1.732... Razvozlajmo to skrivnost, ki sploh ni več skrivnost. Vsi pravokotni trikotniki, ki imajo en ostri kot enak $30^0$, so si podobni, to že vemo. Torej je vaš pravokotni trikotnik podoben našemu. V podobnih trikotnikih so razmerja pripadajočih stranic enaka, torej smo morali vsi dobiti isti rezultat. (Glej sliko 2.)




Slika 2

Vse razmišljanje lahko ponovimo za kakšen drug kot (npr. $\delta = 60^0$, $\delta = 45^0$, $\delta = 32^0$, ...). Spet bi vsi dobili iste količnike, toda pri vsakem kotu drugačne. Ker so ti količniki odvisni le od velikosti kota, jih bomo označili:

$$\sin\delta = \frac{\text{dolžina katete nasproti } \delta}{\text{dolžina hipotenuze}}$$ (beri: *sinus*)

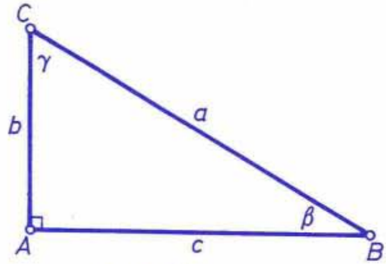
$$\cos\delta = \frac{\text{dolžina katete, priležne kotu } \delta}{\text{dolžina hipotenuze}}$$ (beri: *kosinus*)

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{\text{dolžina katete nasproti } \delta}{\text{dolžina katete, priležne } \delta}$$ (beri: *tangens*)

$$\mathrm{ctg}\delta = \frac{\text{dolžina katete, priležne } \delta}{\text{dolžina katete nasproti } \delta}$$ (beri: *kotangens*)

V prejšnjem primeru smo imeli $\delta = 30^0$ in smo ugotovili, da je $\sin(30^0) = 0.5$, $\cos(30^0) = 0.87$, $\mathrm{tg}(30^0) = 0.58$, $\mathrm{ctg}(30^0) = 1.73$. Podobno bi dobili $\sin\delta$, $\cos\delta$, ..., za kak drug kot $\delta$. Če spremenimo $\delta$, se spremenijo tudi $\sin\delta$, $\cos\delta$... Opravka imamo torej s štirimi funkcijami. To so funkcije kotov in zato *kotne funkcije.*

Da bi si povedano dobro zapomnili, narišimo še enkrat pravokotni trikotnik (slika 3). Kateto nasproti kota $\beta$ smo označili z $b$, kateto, ki je priležna kotu $\beta$, s $c$ in hipotenuzo z $a$.



Slika 3

Sedaj lahko napišemo krajše:

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \qquad \cos\beta = \frac{c}{a} \qquad \mathrm{tg}\beta = \frac{b}{c} \qquad \mathrm{ctg}\beta = \frac{c}{b}$$

Ker je hipotenuza najdaljša stranica pravokotnega trikotnika, sta funkciji $\sin\delta$ in $\cos\delta$ manjši od 1 za vsak kot $\delta$.

Da bi preverili, če smo povedano dobro razumeli, poskusimo sedaj sami ob sliki 3 napisati s pomočjo stranic, kaj je $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, $\mathrm{tg}\gamma$, $\mathrm{ctg}\gamma$. (V pomoč: kateta nasproti kota $\gamma$ je $c$.)

Preverimo: $\sin\gamma = \frac{c}{a}$, $\cos\gamma = \frac{b}{a}$, $\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{c}{b}$, $\mathrm{ctg}\,\gamma = \frac{b}{c}$.

Kotne funkcije imajo mnogo lepih lastnosti:

a) $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

((sin$\beta$)$^2$ bomo krajše zapisali kar $\sin^2\beta$)

S pogledom na sliki 3 in po Pitagorovem izreku velja:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{(b^2+c^2)}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Gotovo boste znali sami preveriti sledeče lastnosti:

b) $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} \qquad \mathrm{ctg}\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} \qquad \mathrm{tg}\beta = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,\beta} = \mathrm{ctg}^{-1}\beta$

Pozorni bralec je ob sliki 3 opazil enakost:

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \cos\gamma$$

Vemo pa, da je $\beta = 90^0 - \gamma$. To pomeni, da velja lastnost

c) $\sin(90^0 - \gamma) = \cos\gamma$ za kakršenkoli $\gamma$.

Podobno, se prepričajte sami, velja:

$$\cos(90^0 - \gamma) = \sin\gamma$$
$$\mathrm{tg}(90^0 - \gamma) = \mathrm{ctg}\ \gamma$$
$$\mathrm{ctg}(90^0 - \gamma) = \mathrm{tg}\gamma$$

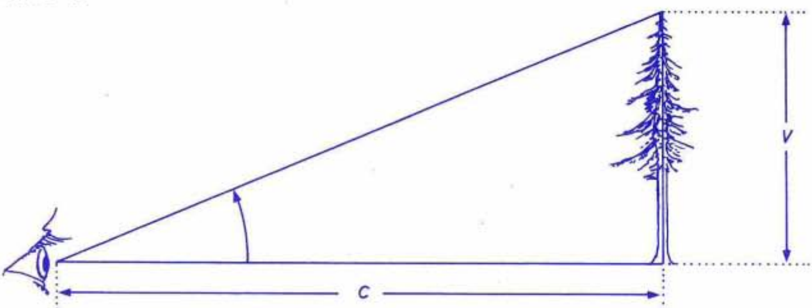
Ne pozabimo, da smo razmišljanje začeli z "zahtevo", da je kot $\delta$ med $0^0$ in $90^0$. Kako bi sicer sploh narisali pravokotni trikotnik? Torej vemo zaenkrat le, kaj so *kotne funkcije* za kote med $0^0$ in $90^0$ (za ostre kote).

Kako bomo v nadaljnjem "dobili" vrednost kotne funkcije za neki določeni kot? Lahko čim natančneje narišemo pravokotni trikotnik z danim kotom, izmerimo dolžine stranic in izračunamo kotni funkciji pripadajoč količnik.

Veliko hitreje bo, če vrednost kotne funkcije odčitamo v tabelah ("logaritemske tablice"). Še enostavneje bo uporabiti računalnik. Našega dogovora, kaj pomeni $\sin\delta$, $\cos\delta$, ... pa nikar ne pozabimo, sicer bomo tudi z najboljšim računalnikom podobni butalcem, ki imajo telefonski imenik brez imen, le številke, pa so vsi srečni, ker imajo najtanjši telefonski imenik, čeprav je popolnoma neuporaben.

Kaj pa vprašanja iz začetka tega kramljanja? Ali smo se sploh naučili kaj uporabnega? Nikar ne odgovarjajmo na vprašanja s še težjimi vprašanji! Raje poskusimo!

Če se postavimo na pravo mesto, bodo "podnožje drevesa", "vrh drevesa" in "naše oči" tvorili pravokotni trikotnik. Še prej izmerimo razdaljo od drevesa do mesta, od koder ga opazujemo. (Torej poznamo dolžino ene katete pravokotnega tirkotnika.) Kot, pod katerim vidimo drevo, lahko izmerimo. Glej sliko 4.



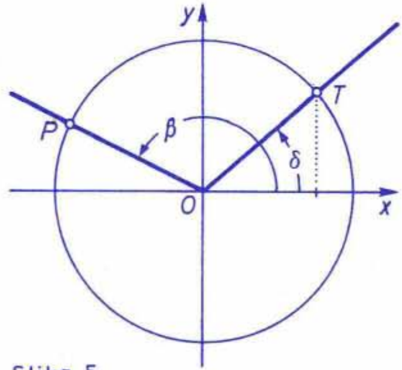

Slika 4

Ali je to dovolj, da določimo višino drevesa (dolžino druge katete)? Vemo, da je $\operatorname{tg}\delta = \frac{v}{c}$, torej $v = c \,.\, \operatorname{tg}\delta$. Poznamo $c$, poznamo $\delta$ in znamo izračunati $\operatorname{tg}\delta$, to pa zadostuje za izračun višine drevesa ($v$).

Kaj če nimamo pri roki kotomerja? Bi znali tedaj določiti višino drevesa, dimnika ...? Poskusite, opišite vaše razmišljanje in nam ga pošljite.

Poglejmo si še eno, zelo nazorno predstavitev kotnih funkcij.

Narišimo koordinatni sistem in krog s središčem v izhodišču ter radijem 1. (slika 5). Narišimo poltrak iz izhodišča, ki oklepa z $x$ osjo kot $\delta$. Presečišče krožnice in poltraka označimo s $T$. Vztrajni bralec bo kot rezultat lastnega razmišljanja dobil, da so koordinate točke $T$ $(\cos\delta, \sin\delta)$. Ob tej sliki bo gotovo jasen dogovor: $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = 1$ in $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$. Kar samo se nam ob tej sliki ponuja tudi, kaj naj bo $\sin\delta$ in $\cos\delta$ za kot $\delta$, ki je




Slika 5

večji od $90^0$, ali za negativni kot. Za kakršenkoli kot $\delta$ narišemo poltrak, ki z $x$ osjo oklepa kot $|\delta|$ v pozitivni smeri, če je $\delta$ pozitiven, in v negativni smeri, če je $\delta$ negativen. Najbrž že vemo, da je pozitivna smer obratna smeri urnega kazalca, negativna smer pa je smer vrtenja urnega kazalca. Tedaj je število $\cos\delta$ enako $x$ koordinati, $\sin\delta$ pa $y$ koordinati presečišča poltraka in krožnice. Sedaj torej vemo, kaj je $\sin\delta$ in $\cos\delta$ za kakršenkoli kot $\delta$. Dogovorimo se še: $\mathrm{tg}\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta}$ in $\mathrm{ctg}\delta = \frac{1}{\mathrm{tg}\delta}$ tudi za $\delta$, ki ni med $0^0$ in $90^0$.

Večino tega ste ali še boste srečali pri rednem pouku, zato končajmo z nekaj vprašanji za najbolj radovedne.

*Ali veljajo lastnosti* a), b), c) *za vse kote?*
*Zakaj velja* $\sin\delta = \sin(180^0 - \delta)$?
*Zakaj velja* $\cos\delta = -\cos(180^0 - \delta)$?
*Zakaj velja* $\sin\delta = -\cos(90^0 + \delta)$?
*Zakaj velja* $\sin\delta = -\sin(360^0 - \delta)$?
*Zakaj velja* $\sin(-\delta) = -\sin\delta$*?*
*Zakaj velja* $\cos(-\delta) = \cos\delta$*?*
*Koliko je* $\mathrm{tg}\,60^0$, $\mathrm{tg}\,70^0$, $\mathrm{tg}\,80^0$, $\mathrm{tg}\,85^0$, ...., $\mathrm{tg}\,90^0$*?*
*Bi znali skicirati grafe kotnih funkcij?*
*Kako je s kotnimi funkcijami kota, merjenega v radianih?*
*Koliko je* $\sin\frac{\pi}{6}\mathrm{rd}$? ($1^0 = \pi/180^{\mathrm{rd}}$)

Gotovo to niso vsa vprašanja, ki si jih lahko zastavite. Odgovore lahko poskušate poiskati sami ali počakajte, da jih poiščete skupaj pri pouku (mogoče pri krožku).

Marsikaj boste še slišali o kotnih funkcijah. Naj omenim le *kosinusov izrek,* ki ga lahko uporabimo v poljubnem trikotniku. Če so $a, b, c$ stranice poljubnega trikotnika, $\delta$ pa kot nasproti stranice $a$, velja $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\delta$.



*Damjan Kobal*