PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **13** (1985/1986)
Številka 1
Stran 45

Dragoljub M. Milošević, prevod Peter Petek:

DVA DOKAZA

Ključne besede: naloge, matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/13/747-Milosevic.pdf

DVA DOKAZA

1. Če sta R in r polmera pravokotnemu trikotniku opisane in vpisane krožnice, tedaj velja neenakost

$$R \geqslant r(1 + \sqrt{2})$$

Dokaži!

2. Dokaži, da v pravilnem osemnajstkotniku velja

$$a^3 + R^3 = 3aR^2$$

kjer je a stranica in R polmer krožnice, opisane okrog tega mnogokotnika.

Dragoljub M. Milošević
Prev. *Peter Petek*

DVA DOKAZA – rešitev s str. 45

1. Za kateti a, b velja $(a - b)^2 \geqslant 0$, od koder izpeljemo

$$2(a^2 + b^2) \geqslant (a + b)^2 \tag{1}$$

Neenakost (1) korenimo in upoštevamo Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$ ter dobimo

$$a + b \leqslant c\sqrt{2} \tag{2}$$

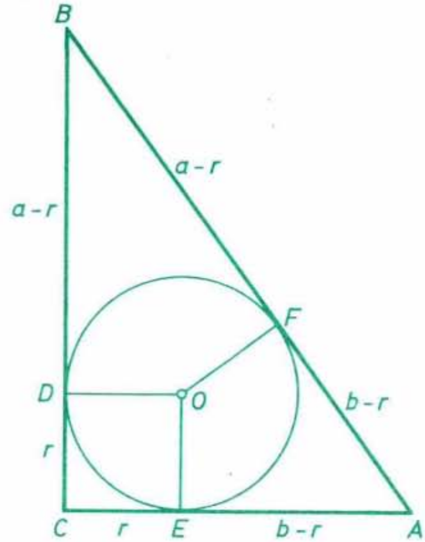
Iz slike razberemo, da velja $c = (a - r) + (b - r)$, t.j.

$$a + b = c + 2r \qquad (3)$$

Na osnovi (2) in (3) imamo $c + 2r \leqslant c\sqrt{2}$. Ker pa je $c = 2R$, sledi $R(\sqrt{2} - 1) \geqslant r$ oziroma

$$R \geqslant r(1 + \sqrt{2})$$

Enakost velja le v primeru, ko je trikotnik enakokrak in pravokoten.



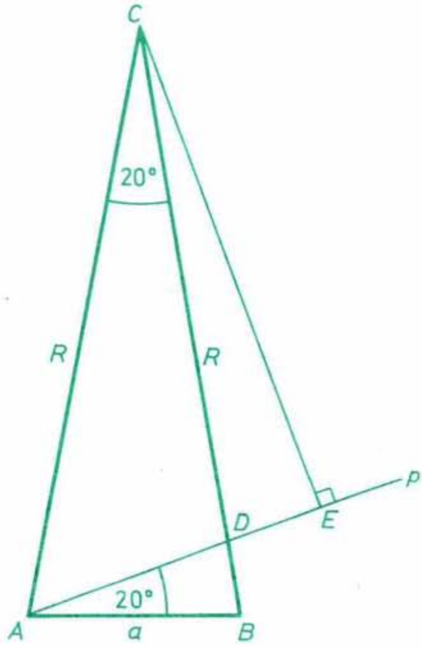
2. Pravilen mnogokotnik z 18 stranicami lahko razstavimo na ravno toliko enakokrakih trikotnikov z osnovnico a, krakom R in kotom 20^0 pri vrhu. Eden od teh trikotnikov je na sliki. Konstruiramo poltrak Ap tako, da je kot pAa enak 20^0. Na njem izberemo točki D in E tako, da je $D \in BC$ in $CE \perp AE$. Trikotnika ABC in BAD sta podobna, zato je $BD : a = a : R$, od tod $BD = a^2/R$, kar pomeni, da je

$$CD = R - a^2/R \qquad (4)$$

Ker je kot CAE enak 60^0, je v pravokotnem trikotniku ACE stranica $AE = R/2$ in $CE = R\sqrt{3}/2$. V pravokotnem trikotniku CDE je še $DE = R/2 - a$ in po Pitagorovem izreku

$$CD^2 = (R/2 - a)^2 + 3R^2/4 \qquad (5)$$

Vstavimo (4) v (5), uredimo in dobimo zahtevano enakost.



Dragoljub M. Milošević
Prev. *Peter Petek*