PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **12** (1984/1985)
Številka 5
Strani 254–255

Roman Drnovšek:

ŠE O NALOGI "BLIŽNJI POTENCI"

Ključne besede: računalništvo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/12/763-Drnovsek.pdf

ŠE O NALOGI »BLIŽNJI POTENCI«

Prispevek je odmev na članek Tomaža Pisanskega: Rešitve naloge "Bližnji potenci", Presek 1984/85, št. 2. V tem članku je med drugim govor o verižnih ulomkih, ki jih zapišemo v obliki:

$$V_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1, a_2, ..., a_n] \qquad (1)$$

kjer so a_i ($i = 1, 2, ..., n$) cela števila, ki izpolnjujejo pogoje:

$$a_0 \geqslant 0, a_1 \geqslant 1, a_2 \geqslant 1, ..., a_{n\ 1} \geqslant 1, a_n \geqslant 2 \qquad (2)$$

Dolžina verižnega ulomka je v tem primeru enaka n. V omenjenem članku avtor postavlja vprašanje, kakšno mora biti (največje celo število na računalniku) *maxint*, da obstaja verižni ulomek z dolžino, večjo od 100, pri čemer števec in imenovalec tega ulomka ne smeta preseči *maxint*.

Vzemimo verižni ulomek (1) in določimo $a_1, a_2, ..., a_n$ tako, da bosta števec in imenovalec nastalega ulomka čim manjša. Očitno mora veljati $a_1 = 0$. Sedaj postavimo:

$$\frac{p_i}{q_i} = \cfrac{1}{a_i + \cfrac{1}{\cdots \cfrac{1}{a_n}}}$$

kjer so p_i in q_i ($i = 2, 3, ..., n$) naravna števila in sta si p_i, q_i tuji števili. Očitno velja:

$$\frac{p_i}{q_i} = \cfrac{1}{a_i + \cfrac{p_{i+1}}{q_{i+1}}} \quad \text{oziroma} \quad \frac{p_i}{q_i} = \frac{q_{i+1}}{a_i q_{i+1} + p_{i+1}}$$

Ker sta p_{i+1} in q_{i+1} tuji si števili, velja isto tudi za q_{i+1} in $(a_i q_{i+1} + p_{i+1})$ in se torej zadnji ulomek (na desni) ne more krajšati. Torej velja:

$$p_i = q_{i+1} \quad \text{in} \quad q_i = a_i q_{i+1} + p_{i+1} \qquad (3)$$

Od tod ugotovimo, da sta p_i in q_i (pri danih p_{i+1}, q_{i+1}) najmanjša, če so števila a_i čim manjša ($i = 2, 3, ..., n$). Glede na pogoje (2) določimo: $a_2 = 1, a_3 = 1, a_{n-1} = 1, a_n = 2$. Izračunajmo sedaj vrednosti teh verižnih ulomkov pri različnih n:

$$n = 2: \qquad V_2 = 1/2$$

in podobno $V_3 = 2/3$, $V_4 = 3/5$, $V_5 = 5/8$. Hitro spoznamo, da v ulomkih nastopajo števila Fibonaccijevega zaporedja. O tem zaporedju je bilo v Preseku napisanih že več člankov, zato bi navedli le definicijo tega zaporedja

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{k+2} = f_{k+1} + f_k \quad (k = 1, 2, ...)$$

Iz definicije se lahko izpelje:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right)$$

Prvih nekaj členov tega zaporedja je 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Domnevamo, da je $V_n = f_n/f_{n+1}$. Če v (3) vstavimo $a_i = 1$, dobimo: $q_i = q_{i+1} + q_{i+2}$ in $p_i = q_{i+1}$. Poleg tega je $V_2 = 1/2$. Oboje potrjuje našo domnevo. Zdaj lahko zaključimo: števec in imenovalec ulomka, ki ima kot verižni ulomek dolžino n, nista manjša od f_{n+1} oziroma če je maxint manjši od f_{n+1}, potem je maksimalna dolžina verižnega ulomka na takem računalniku $(n-1)$. V našem primeru mora biti maxint manjši od f_{102} ($n = 101$), da v programu "verižni" (glej omenjeni članek) ne bo prišlo do prekoračitve.

Na koncu naj dodamo, da je $f_{102} = 9{,}274.10^{20}$. Za zapis tega števila bi rabili 70 bitov ($2^{70} > f_{102} > 2^{69}$) oziroma 128-bitni računalnik, ker je dolžina besede največkrat potenca števila 2.

Roman Drnovšek