PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **12** (1984/1985)
Številka 4
Strani 196–200

Edvard Kramar:

OCENJEVANJE PRIBLIŽKA ŠTEVILA π NA OSNOVI PREPROSTE STATISTIČNE METODE

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/12/731-Kramar.pdf

OCENJEVANJE PRIBLIŽKA ŠTEVILA π NA OSNOVI PREPROSTE STATISTIČNE METODE

Pojem verjetnosti v vsakdanjem življenju pogosto srečamo. Večkrat govorimo o bolj ali manj verjetnih dogodkih. Nekaj zgledov dogodkov, ki jim želimo izračunati ali vsaj oceniti verjetnost, je na primer: met šestice z igralno kocko, met dinarskega kovanca na grb, dogodek, da na slepo izberemo uporaben izdelek iz množice 10 izdelkov, izmed katerih jih je 9 uporabnih, dogodek, da čakamo na avtobus po prihodu na postajo manj od ene minute, če ta vozi redno in enakomerno na vsakih pet minut, itd. Natančna matematična definicija pojma verjetnosti je precej zapletena. Nekateri bralci jo bodo morda srečali v višjih razredih srednje šole ali kasneje. Povejmo samo to, da verjetnost nekega dogodka A opišemo s številom $P(A)$ med 0 in 1. Čim bližje je to število številu 1, tem bolj verjeten je dogodek. Verjetnost dogodka, ki se pri vsakem opazovanju zgodi, je 1. Pri nekaterih poskusih lahko iz simetričnosti situacij ugotovimo, kolikšna je verjetnost posameznih dogodkov. Vzemimo za primer metanje igralne kocke. Če je kocka pravilne oblike, ni nobenega razloga, da bi na kakšno stran bolj pogosto padala. Ker je strani šest, rečemo, da je verjetnost dogodka, da pade na primer število 2, enaka 1/6. Verjetnost, da pade število 7 je 0, verjetnost dogodka, da pade na eno od števil 1 do 6, pa je 1. Podobno je pri metu pravilnega dinarskega kovanca verjetnost dogodka, da pade grb, enaka 1/2. Pri vseh poskusih pa stvari seveda niso tako preproste, lahko se še na različne načine zapletejo.

Kot približek za verjetnost nekega dogodka pogosto vzamemo število, ki ga dobimo po tako imenovani statistični metodi. Denimo, da lahko naredimo serijo enakih poskusov in opazujemo, kolikokrat se je pri tem zgodil naš dogodek. Če se je pri n ponovitvah dogodek A zgodil m-krat, rečemo, da ima relativno frekvenco $f(A) = m/n$. Če naredimo več takih serij poskusov, vsako pri dovolj velikem n, se izkaže, da so take frekvence dogodkov blizu dejanskih verjetnosti $P(A)$ dogodka A. Za zgled navedimo nekaj rezultatov, ki so jih dobili pri n-kratnem metu kovanca. A pomeni dogodek, da kovanec pade na cifro.

n	m	$f(A)$
4040	1890	0.4900
8178	4086	0.4996
12000	5981	0.4984

Opazimo, da so relativne frekvence blizu dejanske verjetnosti $P(A) = 0.5$ (Da so vse vrednosti pod 0.5, je povsem slučajno). Bralec lahko še sam naredi nekaj serij poskusov. Pri tem je potrebno opozoriti še na nekaj stvari. Ni rečeno, da v primeru, ko število ponovitev poskusa povečamo, dobimo število, ki je bližje k 1/2 kot v prejšnjem primeru. To opazimo tudi v zgornji tabeli. Zgodi se lahko tudi, da se relativna frekvenca zelo oddalji od pričakovane vrednosti. Teoretično je na primer možno, da kovanec vržemo stokrat – vsakič na grb. Ali lahko tedaj rečemo, da je verjetnost našega dogodka enaka 0?

Po uvodnem delu, ki nas je bežno seznanil s pojmom verjetnosti, si bomo ogledali preprost primer uporabe računalnika za ponazoritev nekega starega poskusa iz zgodovine verjetnostnega računa. Vzemimo, da smo na večji papir narisali na razdalji a vrsto vzporednih premic. Nato vzamemo iglo dolžine d (zaradi enostavnosti naj bo $d \leqslant a$) in jo na slepo večkrat vržemo na papir. Opazili bomo, da bo igla včasih presekala kakšno od vzporednic, včasih pa ne. Zanima nas verjetnost dogodka A, da igla seče eno od vzporednih premic. To nalogo, ki je ena od znamenitih nalog klasičnega verjetnostnega računa, je postavil in rešil leta 1777 G. Buffon.

Slika 1

Opisani dogodek sicer ni take vrste, kot je met kovanca ali kocke, vendar se z metodami višje matematike zlahka da izračunati njegovo verjetnost. Ker vsi bralci Preseka takega računa ne bi razumeli, bomo kar zapisali rezultat

$$P(A) = \frac{2d}{\pi a}$$

Najbolj zanimivo pri tem je, da v rezultatu nastopa število π, ki ste ga prvič srečali na primer pri obrazcih za obseg in ploščino kroga. Ravno ta prisotnost števila π je vzpodbudila vrsto ljudi k naslednjemu poskusu. Iglo so vrgli zelo velikokrat (n-krat) in prešteli, kolikokrat je padla čez eno od črt (m-krat). Relativno frekvenco $f(A) = m/n$ so vzeli za približek zgornje verjetnosti in od tod ocenili približek za število π

$$\pi \doteq \frac{2dn}{am}$$

Zapišimo samo nekaj rezultatov, ki jih najdemo navedene v raznih knjigah (pri tem je $a = 1$)

eksperimentator	d	leto	število poskusov	ocena za π
Wolf	0.8	1850	5000	3.1596
Smith	0.6	1855	3204	3.1553
de Morgan	1.0	1860	600	3.1370
Fox	0.75	1894	1120	3.1419

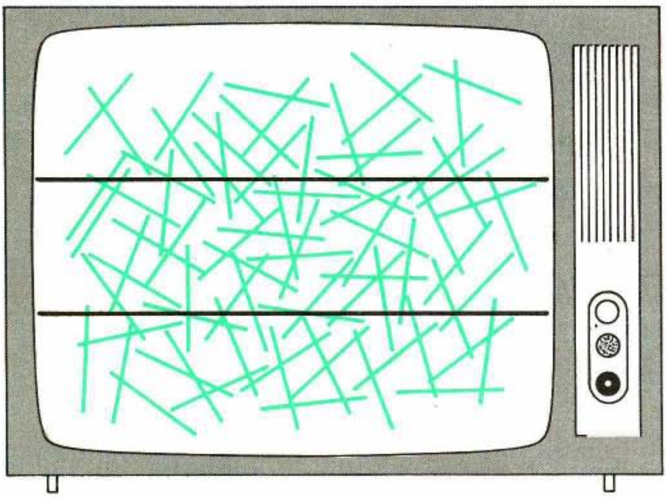
Število π, o katerem je Presek že pisal, ima neskončen neperiodičen decimalni zapis ($\pi \doteq 3.14159265....$), kar pomeni, da ga ne moremo zapisati v obliki ulomka. Za računanje čim večjega števila njegovih decimalnih mest je znanih vrsta drugih uspešnejših metod. Zgornji poskus z metanjem igle prav gotovo ne more prinesti velike natančnosti. Vzeti ga moramo le kot zanimivost.
Metanje igle lahko zelo nazorno posnemamo z računalnikom. Zaradi enostavnosti vzemimo, da je $d = a$. Spodaj je narejen zgled programa v basicu za hišni računalnik ZX Spectrum, z majhnimi spremembami pa ga bo bralec lahko uporabil tudi na kakšnem drugem računalniku. Vzeli smo $a = 50$ enot in na ekranu narisali dve vzporednici na tej razdalji. Slučajnost pri metu generiramo s funkcijo RND, ki pomeni na slepo izbrano realno število med 0 in 1. Lego igle določimo s slučajnim kotom med 0^0 in 180^0 (fi = PI ★ RND) in slučajno razdaljo ene konice igle od zgornje vzporednice (b = INT(a ★ RND)). Dodali smo še slučajni pomik v levo ali desno (stavek 85), da igla pada nekako po celem ekranu, vendar to ne vpliva na rezultat. Program sproti ne briše igel, kar bi pomenilo, da namesto ene igle vržemo n enakih igel. Lahko pa bi uredili tudi brisanje igel. Programu se da dodati še vrsto drugih dodatkov, na primer, da zaslišimo zvok, ko igla preseka premico (stavek 130), da se tam morda pojavi svetlobni znak, uporabimo barvne učinke itd.

Naj navedemo nekaj rezultatov, zaokroženih na 5 decimalnih mest

n	m	$f(A)$
98	57	3.43860
234	150	3.14094
239	152	3.14474
357	220	3.24545

```
5 REM  metanje igle
6 REM in računanje približka za število pi
7 REM
10 INPUT "število metov"; n
15 PRINT "število metov   ";n
20 LET a=50: LET m=0
30 PLOT 0,70: DRAW 255,0
40 PLOT 0,120: DRAW 255,0
50 FOR i=1 TO n
60 LET b=INT(a*RND): LET fi=PI*RND
70 LET x1=a*COS(fi): LET y1=a*0.5*SIN(fi)
80 LET z1=70+b-y1: LET z2=70+b+y1
85 LET c=INT(150*RND)+50
90 PLOT c,z1: DRAW x1,2*y1
100 IF z1 < 70 AND z2 > 120 THEN GO TO 140
110 LET m=m+1
120 PRINT AT 3,3; m;"   ";i
130 BEEP 0.5,3
140 NEXT i
150 PRINT "približek za pi =  ";2*n/m
160 STOP
```

Bralec, ki ima dostop do računalnika, bo gotovo tudi sam poskusil posnemati metanje igle (ali igel) na računalniku, pri tem bo spreminjal program po svoji želji. Če vzamemo večje število poskusov (*n*), lahko izključimo risanje, saj nas zanima samo rezultat na koncu. Velja opozoriti, da prevelikega števila *n* pravzaprav nima smisla vzeti, saj rezultati ne bodo bistveno boljši, zaradi vsakokratnega računanja nekaterih funkcij pa bo računalnik kar precej časa "mlel". Prav tako nima smisla iti na lov za čim boljšim približkom števila π. Ker poznamo veliko njegovih decimalnih mest, bi lahko poskus priredili tako, da bi ga prekinili v trenutku za nas najbolj sprejemljivega približka. To pa ni poskus v zgornjem smislu, ko je število metov vnaprej izbrano. Drug način grobe potvorbe rezultatov pa bi bil, da bi vzeli ulomek, ki je dober približek za število π, kot je na primer star kitajski približek 355/113, in bi nekomu sporočili, da nam je pri 355-kratnem metu igle ta sekala vzporednico 226-krat. V resnici je prav malo verjetno (da se ugotoviti celo verjetnost tega dogodka, in sicer je manjša od 0.034), da se nam bo ravno to zgodilo. Omeniti velja še dejstvo, da smo zgoraj privzeli, da je generator slučajnih števil (RND) na računalniku dobro narejen, da dobro posnema slučajno izbiro realnega števila med 0 in 1, kar pa je zopet le približek.



Slika 2

Ob koncu naj še omenimo, da obstaja več posplošitev Buffonove naloge, na primer ravnino lahko tudi v drugi smeri razdelimo z vzporednicami, namesto igle lahko vzamemo poljuben konveksen lik iz kartona, pločevine ali podobnega materiala. Verjetnost ustreznega dogodka je zopet izražena s številom π.

Edvard Kramar