PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **10** (1982/1983)
Številka 3
Strani 115–117

Dragoljub M. Milošević, prevod Peter Petek:

VSOTA KUBOV

Ključne besede: matematika, aritmetika, kubi števil.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/10/617-Milosevic-Petek.pdf

VSOTA KUBOV

V matematiki pogosto naletimo na važno nalogo: sešteti je treba k-te potence prvih n naravnih števil:

$$s_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

n in k sta seveda naravni števili.

Pokazali bomo, in to na tri različne načine, kako lahko poiščemo

$$s_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

če poznamo formuli za vsoto prvih n naravnih števil in za ustrezno vsoto kvadratov

$$s_3(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

$$s_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$$

Prvi način

S pomočjo lihih naravnih števil 1, 3, 5, 7, 9, ... sestavimo zaporedje a_1, a_2, a_3, ... a_n takole

$a_1 = 1$
$a_2 = 3 + 5$
$a_3 = 7 + 9 + 11$
$a_4 = 13 + 15 + 17 + 19$
itd.

Če seštejemo vse člene zaporedja a_n, dobimo ravno vsoto prvih $n(n + 1)/2$ lihih števil

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n = 1 + 3 + 5 + \ldots +(n^2 + n - 1)$$

Tu smo na koncu kar zapisali $n^2 + n - 1$ kot zadnje liho število, ki še pride v poštev. Res, liha števila sestavljajo aritmetično zaporedje s prvim členom 1 in razliko 2, zato je liho število z zaporedno številko $n(n + 1)/2$ enako

$$1 + (n(n + 1)/2 - 1).2 = n^2 + n - 1$$

To liho število je zadnji sumand člena a_n. Prvi sumand v tem členu pa je za $2.(n - 1)$ manjši, torej enak

$$n^2 + n - 1 - 2(n - 1) = n^2 - n + 1$$

Člen a_n je vsota aritmetičnega zaporedja z n členi, prvi sumand je $n^2 - n + 1$, zadnji $n^2 + n - 1$. Zato

$$a_n = (n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1).n/2 = n^3$$

To pa pomeni, da je vsota prvih n kubov ravno enaka vsoti prvih $n(n + 1)/2$ lihih naravnih števil. Opravka imamo torej z aritmetičnim zaporedjem, število členov je $n(n + 1)/2$, prvi člen je enak 1, zadnji $n^2 + n - 1$.

$$S_3(n) = ((1 + n^2 + n - 1).n(n + 1)/2$$

Uredimo in dobimo formulo

$$S_3(n) = n^2(n + 1)^2/4$$

Drugi način

Vzemimo najprej, da je število n liho in preuredimo člene v vsoti $S_3(n)$:

$$S_3(n) = (1^3 + (n - 1)^3) + (2^3 + (n - 2)^3) + \ldots . + n^3 =$$

$$= (1^3 + n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + (2^3 + n^3 - 3n^2.2 + 3n.2^2 - 2^3) +$$

$$+ \ldots n^3 = n^3 + n^3 + n^3 + \ldots . + n^3 - 3n^2(1 + 2 + \ldots + (n - 1)/2)$$

$$+ 3n(1^2 + 2^2 + \ldots + ((n - 1)/2)^2)$$

V zgornji vsoti nastopa n^3 najprej $(n - 1)/2$-krat iz vsakega oklepaja, potem pa še n^3, ki smo ga pisali posebej. Zato je enakih sumandov n^3 vsega skupaj $(n - 1)/2 + 1 = (n + 1)/2$. To upoštevamo, vsote v oklepajih pa izrazimo s S_1 oziroma S_2:

$$S_3(n) = n^3.(n + 1)/2 - 3n^2.S_1((n - 1)/2) + 3n.S_2((n - 1)/2)$$

Uporabimo znana rezultata (1) in (2) in uredimo

$$S_3(n) = n^3(n + 1)/2 - 3n^2.\tfrac{1}{2}(n - 1)/2.((n - 1)/2 + 1) +$$

$$+ 3n.\tfrac{1}{6}(n - 1)/2.((n - 1)/2 + 1)(2(n - 1)/2 + 1)$$

$$S_3(n) = n^2(n + 1)^2/4$$

Bralcu prepuščamo, da premisli, kaj se spremeni, če je število n sodo in da sam izpelje isto formulo tudi v tem primeru.

Tretji način

Uporabimo enakosti

$$
\begin{aligned}
1^4 &= 1\\
2^4 &= (1+1)^4 = 1^4 + 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1\\
3^4 &= (2+1)^4 = 2^4 + 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1\\
&\dots\\
&\dots\\
(n+1)^4 &= n^4 + 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n + 1
\end{aligned}
$$

Seštejemo vse zgornje enačbe, pri tem se vse četrte potence razen $(n + 1)^4$ uničijo in ostane

$$(n + 1)^4 = 4(1^3 + 2^3 + \dots n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \dots n^2) +$$

$$+ 4(1 + 2 + \dots + n) + n + 1$$

od tod dobimo

$$4S_3(n) = (n + 1)^4 - 6S_2(n) - 4S_1(n) - (n + 1)$$

Vstavimo (1) in (2) in spet dobimo

$$S_3(n) = n^2(n + 1)^2/4$$

1. Dokaži, da je vsota kubov katerihkoli m zaporednih naravnih števil deljiva z vsoto teh števil.
2. Dokaži, da nobena od številk 2, 3, 7, 8 ni zadnja številka od $S_3(n)$.

Dragoljub M.Milošević
prevedel Peter Petek