ARITMETIČNA IN GEOMETRIJSKA SREDINA DVEH POZITIVNIH ŠTEVIL

V članku bomo na tri načine dokazali, da je aritmetična sredina dveh pozitivnih števil vedno večja ali vsaj enaka geometrijski sredini.

Po definiciji je

aritmerična sredina A dveh števil a in b enaka $A = \frac{a+b}{2}$

geometrijsk sredina G dveh števil a in b enaka $G = \sqrt{ab}$

Trdimo, da je vselej $A \geq G$.

Dokaz 1. Po zgornjih definicijah imamo

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

Torej je res $A \geq G$.

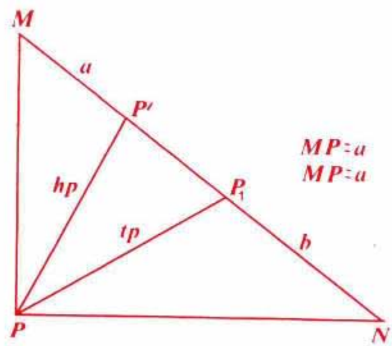
Dokaz 2. Na sliki 1 imamo pravokotni trikotnik MNP z vrisanima višino in težiščnico na hipotenuzo. Trikotnika MPP' in PNP' sta podobna, ker se ujemata v ustreznih kotih. (Zakaj?)

Na sliki smo označili z a odsek hipotenuze MP' in z b drugi odsek NP'. Iz podobnosti trikotnikov $MP'P$ in $PP'N$ sledi

$$a : h_p = h_p : b$$

$$h_p^2 = ab$$

$$h_p = \sqrt{ab}$$



Slika 1

Točka P_1 je središče trikotniku očrtane krožnice in je zato težiščnica enaka

$$t_p = MP_1 = NP_1 \qquad t_p = (a+b)/2$$

V pravokotnem trikotniku PP_1P' je t_p hipotenuza in h_p kateta, zato velja $t_p > h_p$. Enakost nastopi le, če se težiščnica in višina ujemata, kar se zgodi v enakokrakem pravokotnem trikotniku, torej tedaj, ko je $a = b$. Zaključimo

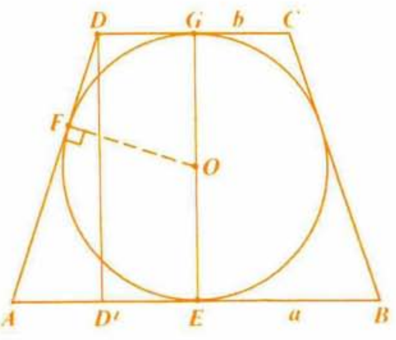
$$t_p \geq h_p$$

oziroma

$$(a + b)/2 \geq ab$$

Dokaz 3. Na sliki 2 imamo enakokraki trapez, ki mu je mogoče včrtati krožnico. Osnovnici trapeza ata a in b. Ker sta odseka tangent iz iste točke na krog enaka, dobimo $AF = AE = a/2$ in $FD = DG = b/2$ in odtod

$$AD = AF + FD = AE + DG = (a + b)/2$$



Slika 2

Oglejmo si pravokotni trikotnik ADD'! Stranico AD smo ravnokar spoznali: $AD = (a + b)/2$. Stranica AD' pa je v enakokrakem trapezu enaka $(a - b)/2$. Po Pitagorovem izreku imamo

$$DD'^2 = ((a + b)/2)^2 - ((a - b)/2)^2 = ab$$

$$DD' = \sqrt{ab}$$

Spet je hipotenuza AD aritmetična sredina in kateta DD' geometrična sredina. Hipotenuza je večja od katete le v primeru, ko je $a = b$ - trapez se spremeni v kvadrat - se obe daljici pokrivata. Vedno pa velja $AD \geq DD'$ oziroma

$$(a + b)/2 \geq ab$$

Naloge

1. Če je $x > 0$, velja $x + 1 \geq 2\sqrt{x}$. Dokaži! Kdaj velja enakost?

2. Dokaži, da za pozitivni števili x in y veljata neenakosti

   (i) $x/y + y/x \geq 2$ (ii) $xy \leq \sqrt{(x^4 + y^4)/2}$

Kdaj veljata enakosti?

3. Poišči največjo vrednost izraza $x/(mx^2 + n)$, če sta m in n pozitivni števili.

4. Stranici a in b sta kateti, c je hipotenuza pravokotnega trikotnika. Dokaži, da velja

   $a + b \leq c\sqrt{2}$

5. Števila m, n, p, q so pozitivna. Dokaži:

   $(m + n + p + q)^2 \leq 256mnpq$

Dragoljub M. Milošević
prev. *Peter Petek*