

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 9 (1981/1982)

Številka 1

Strani 21-24

Dragoljub M. Milošević, prevod Peter Petek:

PLOŠČINA PRAVILNEGA DVANAJSTKOTNIKA

Ključne besede: matematika, geometrija, ploščina, dvanajstkotnik.

Elektronska verzija:

<http://www.presek.si/9/9-1-Milosevic-Petek-dvanajstkotnik.pdf>

© 1981 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

PLOŠČINA PRAVILNEGA DVANAJSTKOTNIKA

Pokazali bomo kako lahko izračunamo ploščino pravilnega dvanajstkotnika, če poznamo

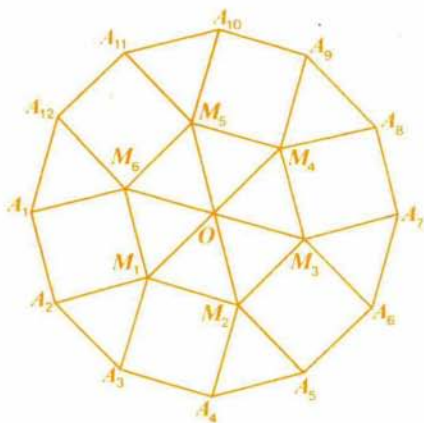
- A) stranico a pravilnega dvanajstkotnika
- B) polmer r dvanajstkotniku opisanega kroga

A) 1. način

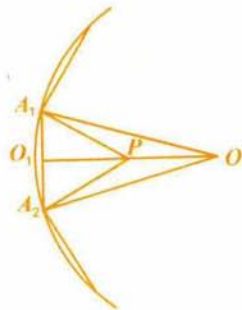
Nad vsako drugo stranico pravilnega dvanajstkotnika $A_1A_2 \dots A_{12}$ (slika 1) konstruiramo na notranji strani po en enakostraničen trikotnik. Lahko je pokazati, da njihovi vrhovi

M_1, M_2, \dots, M_6 predstavljajo oglišča pravilnega šestkotnika s stranico a . Tako smo dvanajstkotnik razstavili na 6 skladnih kvadratov in 12 skladnih enakostraničnih trikotnikov. Zato je ploščina enaka

$$P = 6 \cdot a^2 + 12 \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3a^2 (2 + \sqrt{3})$$



Slika 1



Slika 2

2. način

Izberemo enega od 12 skladnih enakokrakih trikotnikov z vrhom v središču dvanajstkotnika in stranico a kot osnovnico (slika 2). Konstruiramo višino na osnovnico OO_1 . Potem izberemo na

daljici OO_1 , točko P tako, da je trikotnik A_1A_2P enakostraničen, torej $\angle A_1PA_2 = \angle A_2PA_1 = 60^\circ$. Kot ob vrhu O je enak $360^\circ : 12 = 30^\circ$, kot $\angle OA_1A_2$ ima 75° , $\angle OA_1P = \angle OA_2P = 15^\circ$. Trikotnik A_1A_2P je enakostraničen, trikotnik A_1PO pa ima dva kot enaka 15° , zato je enakokrak in zato $OP = A_1P = a$. Višina OO_1 je torej sestavljena iz višine enakostraničnega trikotnika $O_1P = a\sqrt{3}/2$ in daljice $OP = a$. Tako je ploščina trikotnika A_1A_2O enaka

$$p(\Delta A_1A_2O) = a(a + a\sqrt{3}/2)/2 = a^2(2 + \sqrt{3})/4$$

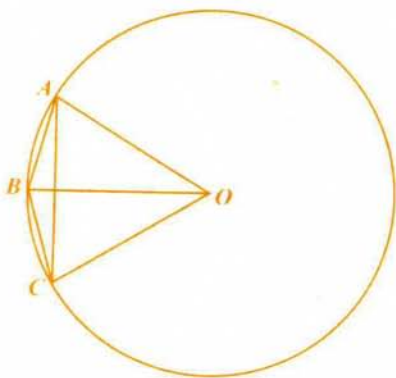
Ploščina dvanajstkotnika je dvanajstkrat večja

$$p = 3a^2(2 + \sqrt{3})$$

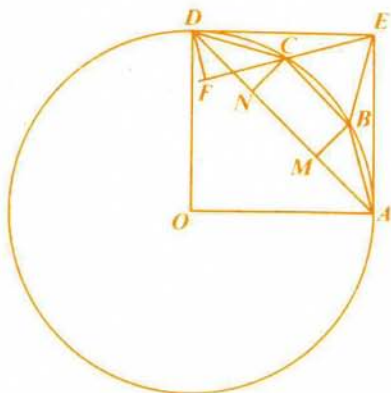
B) 1. način

Pravilni dvanajstkotnik je sestavljen iz šestih skladnih deltoidov. Eden od njih je $ABCO$ na sliki 3. Diagonali deltoida sta obe enaki polmeru r očrtanega kroga. Diagonala BO se kar ujema s polmerom, diagonala AC pa je stranica pravilnega šestkotnika in zato spet enaka polmeru r . Tako imamo

$$rP = 6 \cdot r \cdot r/2 = 3r^2$$



Slika 3

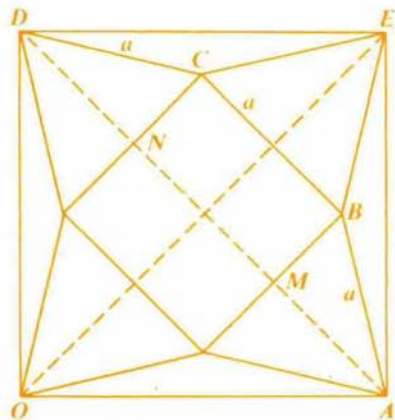


Slika 4

2. način

Na sliki 4 vidimo tri stranice pravilnega dvanajstkotnika in kvadrat, ki smo ga konstruirali nad polmerom r . Najprej bomo

pokazali, da imata enakokraki trapez $ABCD$ in petkotnik $ABCDE$ enaki ploščini.



Slika 5

Točki M in N sta nožišči normal, ki ju spustimo iz točk B in C na diagonalo AD kvadrata. Kot ABC je kot pravilneg dvanajst-kotnika in zato enak 150° , kot ABM je tako $150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ in je trikotnik ABM polovica enakostraničnega. Ker je $\angle DAE = 45^\circ$ in $\angle BAM = 30^\circ$, velja $\angle BAE = 15^\circ$. Pravokotnik $MBCN$ je polovica kvadrata ($MB = \frac{1}{2} BA = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a$) in ima ploščino $a^2/2$. Poglejmo sliko 5! Po simetriji sklepamo, da je trikotnik BCE enakostraničen in zato po ploščini enak vsoti ploščin trikotnikov ABM in DCN . Koti BAE , BEA , CED in CDE so vsi enaki 15° , zato je $\angle DCE = 150^\circ$. Iz točke D potegnemo normalo na podaljšek stranice EC in dobimo nožišče F . Ker je $\angle DCF = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, je tudi trikotnik CDF polovica enakostraničnega in $DF = a/2$. To pa je ravno višina trikotnika CDE na stranico CE , ki je enaka a . Ploščina trikotnika CDE je torej $a^2/4$. Isto velja za trikotnik ABE . Vsota njunih ploščin je zato $a^2/2$, kar je ravna ploščina pravokotnika $BMNC$. Upošteva vse ploščinske enakosti vidimo, da ima trapez $ABCD$ enako ploščino kot petkotnik $ABCDE$. Ker dasta skupaj pol kvadrata, je ploščina petkotnika $OABCDE$ enaka trem četrtinam ploščine

kvadrata $OAED$, to je $\frac{3}{4}r^2$. Dvanajstkotnik sestavljajo štiri enaki petkotniki s ploščinami $\frac{3}{4}r^2$. Tako dobimo končno

$$P = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot p(OAED) = 3r^2$$

Nalogi:

1. Uporabi trapez $ABCD$ na sliki 4 in z njegovo pomočjo še enkrat izračunaj ploščino pravičnega dvanajstkotnika, če poznaš njegovo stranico a !
2. Izrazi ploščino pravičnega dvanajstkotnika, če poznaš polmer p včrtanega kroga.

Dragoljub M. Milošević
prev. *Peter Petek*