PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **6** (1978/1979)
Številka 1
Strani 24–31

Danijel Bezek, priredba Vladimir Batagelj:

NEKAJ O GRAFIH IN NJIHOVI UPORABI

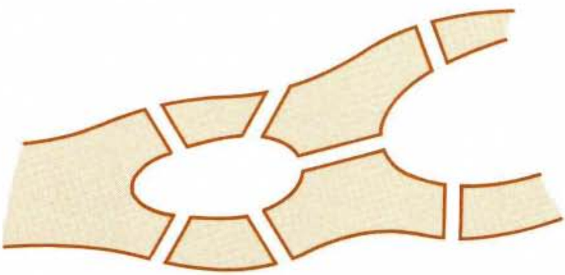
Ključne besede: matematika, kombinatorika, teorija grafov, Eulerjevi grafi, naloge.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/6/348-Bezek.pdf

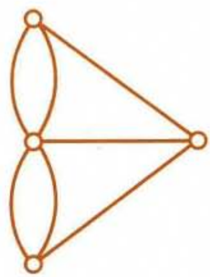
NEKAJ O GRAFIH IN NJIHOVI UPORABI

V ugankarskih kotičkih časopisov in revij najdemo nekatere tipične vrste nalog in problemov. V tem sestavku si bomo ogledali dokaj pogost tip takih nalog in pokazali, kako jih rešujemo z *grafi*, ki jih obravnava posebna veja matematike - *teorija grafov*.

Začetki teorije grafov segajo v 18. stoletje. Staro mesto Königsberg (znano tudi po tem, da tam počivajo posmrtni ostanki velikega filozofa Kanta) je krasilo sedem mostov, ki so povezovali bregove reke Pregel z otočkom sredi nje (Sl. 1).



Sl. 1



Sl. 2

Meščane Königsberga je lep čas vznemirjalo naslednje vprašanje: Ali se je mogoče sprehoditi preko mostov tako, da greš čez vsakega samo enkrat? Poskusi!

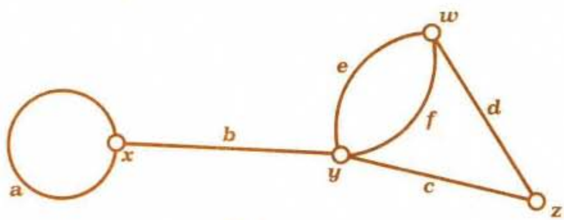
Za problem je zvedel tudi največji matematik tistega časa - *Leonhard Euler* (1707 - 1783). Problem si je poenostavil tako, da je bregove in otoček označil s krožci in jih povezal s črta-

Königsberg - danes Kaliningrad

Leonhard Euler je bil rojen 15. aprila 1707 v Bazlu v Švici. Bil je učenec in prijatelj Bernoullijev. Velik del svojega živ ljenja (1727-1741, 1766-1783) je preživel v Rusiji na Petrograjski (danes Leningrad) akademiji, ki jo je takrat ustanovila carica Katarina I . Tam je tudi umrl 18. septembra 1783. Obdobje 1741-1766 pa je na povabilo Friedricha II prebil na berlinski akademiji znanosti. Euler je eden največjih matemati kov vseh časov. Posegel je na vsa področja matematike in jo obogatil s pomembnimi spoznanji. Štejemo ga med očete variacijskega računa, teorije diferencialnih enačb, teorije števil in topologije. Pri dokazovanju je začel dajati prednost algebri pred geometrijo. Ukvarjal se je tudi s fiziko, mehaniko, balistiko in astronomijo. Leta 1735 je zaradi preveč vnetega opazo vanja Sonca pri sestavljanju sistema za določanje časa oslepel na desno oko. Popolnoma slep je postal leta 1766, kar pa ni bistveno vplivalo na njegovo ustvarjalnost. Imel je izreden spomin. Človeštvu je zapustil nekaj knjig, več kot 800 člankov (nekateri so precej dolgi) in kup neobjavljenih del. Uvedel je oznake e za osnovo naravnih logaritmov, i za kvadtatni koren iz minus ena in $f(\ )$ za funkcije.

mi, ki predstavljajo mostove (Sl. 2). Taki shemi pravimo *graf*. Še nekaj grafov je prikazanih na slikah (Sl. 3) in (Sl. 5).

Kakor vidimo, je graf sestavljen iz množice krožcev ali *točk* grafa, ki so med seboj paroma povezani z množico črt ali *povezav*. Namesto besed točka (grafa) in povezava pogosto uporabljamo tudi besedi *vozel* in *veja*. Točki, ki ju povezava veže, imenujemo *krajišči* povezave. Da ima povezava p krajišči u in v, bomo zapisali $p(u;v)$.



Sl.3

Primer: Graf na sliki 3 je določen z množico točk $T = \{x, y, z, w\}$ in množico povezav $P = \{a(x;x), b(x;y), c(y;z), d(z;w), e(w;y), f(w;y)\}$. Najbrž je med povezavami pritegnila vašo pozornost povezava $a(x;x)$, ki ima za obe krajišči isto točko x. Takim povezavam pravimo *zanke*.

Število povezav, ki imajo za krajišče točko t, imenujemo *kratnost* točke t in jo označimo $k(t)$. Zanke upoštevamo pri določanju kratnosti dvakrat. Tako velja za graf na sliki 3:

$$k(x) = k(w) = 3 \quad , \quad k(y) = 4 \quad \text{in} \quad k(z) = 2 \quad .$$

Postavimo se v neko točko grafa. S tem, da se po povezavi, ki ima točko, v kateri se trenutno nahajamo, za krajišče, pomaknemo v drugo krajišče, lahko "potujemo" po grafu od točke do točke. Zaporedje povezav, ki jih pri tem prehodimo, imenujemo *pot* po grafu.

Za graf na sliki 3 sta zaporedji povezav:

$$P_1 = a, b, c, d, e, e, f$$

$$P_2 = c$$

poti; zaporedje

$$P_3 = b,\ a,\ e$$

pa ni (zakaj?).

Vsaka pot ima svoj *začetek* in svoj *konec*. Pot P_1 ima začetek v točki x in konec v točki y, kar zapišemo $P_1(x,y)$. Za začetek poti P_2 pa lahko izberemo katerokoli od krajišč povezave c. Za to, da bo pot po grafu natančno določena, moramo v splošnem poleg zaporedja prehojenih povezav podati še njen začetek.

Če obstaja pot iz točke u (začetek) v točko v (konec), pravimo, da je točka v *dosegljiva* iz točke u. Kadar so vse točke grafa med seboj dosegljive, bomo rekli, da je graf *povezan*.

Graf na sliki 3 je povezan; če pa "zbrišemo" povezavo b, dobimo nepovezan graf, saj točka x ni več dosegljiva iz drugih točk grafa.

Sedaj vemo o grafih že toliko, da lahko sledimo rešitvi naloge o königsberških mostovih, ki jo posplošimo na grafe takole:

Ali obstaja po danem grafu pot, ki vsebuje vsako povezavo natanko enkrat?

Taki poti pravimo *Eulerjeva pot*. Rešitev zastavljene naloge daje naslednji izrek:

> V grafu obstaja Eulerjeva pot natanko takrat, ko je povezan in ima največ dve točki lihe kratnosti.
> Če obstajata dve lihi točki (vedno obstaja sodo število lihih točk), je ena začetek, druga pa konec Eulerjeve poti.
> Če pa so vse točke sode, je Eulerjeva pot sklenjena ali *cikel* - njen začetek in konec sovpadata; za začetek poti lahko izberemo poljubno točko.

Utemeljimo najprej trditev: če v danem grafu obstaja Eulerjeva pot, potem sta v grafu največ dve lihi točki. Mislimo si, da je graf narisan s kredo. Vzemimo v roke gobo in sledimo Eulerjevi poti po grafu. Prehojeno pot za seboj brišimo. Ko prehodimo celotno pot, bodo vse povezave grafa zbrisane - vse točke bodo imele kratnost 0, torej bodo sode. Očitno pri vsakem prehodu skozi točko zbrišemo dve povezavi - tisto, po kateri smo v točko prišli, in tisto, po kateri smo točko zapustili. Potemtakem pri prehodu skozi njo ostane soda točka soda, liha pa liha. Le na začetku in koncu poti lahko spremenimo parnost točke, kajti le v teh dveh primerih zbrišemo v dani točki eno samo povezavo. Ker morajo biti na koncu vse točke sode, imamo zato lahko spočetka kvečjemu dve lihi točki.

Naj sedaj graf zadošča pogojem izreka. Kako dobimo Eulerjevo pot? Če v grafu obstajata lihi točki, začnemo v eni izmed nji-ju in potujemo po grafu. Ker lahko v vsaki sodi točki pot na-daljujemo, se bomo prej ali slej ustavili v drugi lihi točki. V še ne prehojenem delu grafa so sedaj vse točke sode. To ve-lja tudi v primeru, ko že spočetka ni v grafu nobene lihe toč-ke. V obeh primerih izberemo poljubno točko, ki je krajišče še neprehojene povezave in začnemo potovanje. Ker so vse točke sode, bomo potovanje končali v začetni točki - dobljena pot je cikel. To ponavljamo, dokler ne pokrijemo s cikli ves graf. Zaradi povezanosti grafa lahko cikle (in pot) združimo v en sam cikel (pot). Osnovna zamisel združevanja je prikazana na sliki 4:

Sl.4

S podobnim razmišljanjem je Euler naredil konec brezglavemu iskanju. Svoja dognanja je objavil v razpravi: Solutio proble-matis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae

Petropolitanae VIII, 1736 (1741), p. 128-140. Naloga o königsberških mostovih ni rešljiva, saj ima prirejeni graf štiri lihe točke.

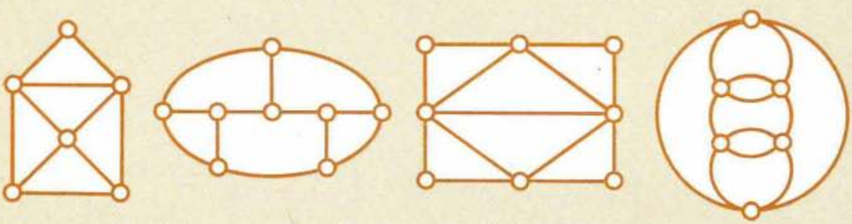
Tovrstne naloge srečamo v ugankarskih kotičkih pogosto pod naslovom "nariši z eno potezo". Take naloge nam ne bodo več delale težav. Kaj pa, če sta v grafu več kot dve lihi točki? V najmanj koliko potezah lahko narišemo tak graf? Odgovor daje izrek:

> Povezani graf z $2m$ lihimi točkami lahko pokrijemo (= vsaka povezava vstopa v neko pot) z m ločenimi (= vsaka povezava vstopa v največ eno pot) potmi.

Sedaj nam ne bo več težko rešiti naslednjih nekaj nalog:

Naloge:

1. Nariši graf, določen z množico točk $T = \{x, y, z, u, v\}$ in množico povezav $P = \{a(z;y),\ b(y;v),\ c(v;z),\ d(u;z),\ e(u;v),\ f(u;y),\ g(v;v)\}$.
2. Nariši povezan graf na petih točkah, ki imajo vse kratnost 2.
3. Kratnosti petih točk so zaporedoma 1, 2, 3, 4 in 5. Nariši graf!
4. V vsakem grafu je sodo mnogo lihih točk. Dokaži!
5. Vsakega izmed grafov na sliki 5 nariši s čim manj potezami (poteza = neprekinjena črta), pri čemer narišeš vsako črto le enkrat:



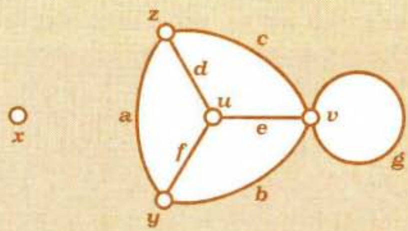
Sl. 5a **Sl. 5b** **Sl. 5c** **Sl. 5d**

Med nalogami je tudi Plemljeva uganka (Sl. 5b). Anekdoto o njej si lahko poiščete v enem od preteklih letnikov Preseka.

6. Pravilni n-kotnik z vsemi diagonalami je pravzaprav graf nad n točkami (oglišči). Če je n liho število, ga lahko po Eulerjevem izreku narišemo v eni potezi. To zna tudi program, ki je "narisal" primer tega mnogokotnika za $n = 31$ (Glej sliko na naslovni strani). Poskusi sam narisati v eni potezi pravilni sedemkotnik z vsemi diagonalami!

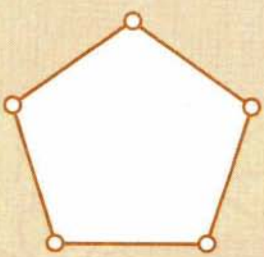
RESITVE

1. Kako narišemo graf? Najprej narišemo za vsako točko po en krogec in ga označimo z njeno oznako. Nato točke povežemo s povezavami in graf je narisan. V našem primeru dobimo



Seveda je slika grafa odvisna od začetne razporeditve točk. Posebnost našega grafa je točka x, ki ni krajišče nobene povezave.

2.



3. Tak graf ne obstaja, ker je število lihih točk v grafu vedno sodo (glej nalogo 4).

4. Vsaka povezava ima dve krajišči. Torej je število vseh krajišč povezav sodo. Število vseh krajišč pa dobimo tudi, če seštejemo kratnosti vseh točk. Ker je vsota soda, mora biti tudi število lihih členov v tej vsoti sodo.