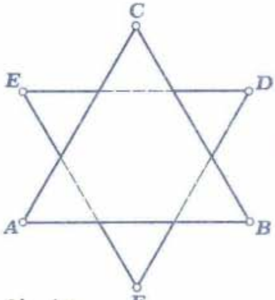
ŠE O ŠESTIH TOČKAH

V prvi številki tega letnika smo vam na strani 57 zastavili nalogo: postavi šest točk v prostor tako, da vedno dobiš enakokrak trikotnik, kakorkoli že izbereš tri točke, pri tem pa nobena peterica točk ne sme ležati na isti ravnini.

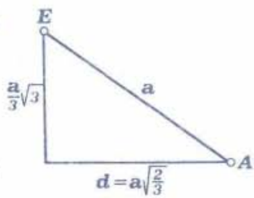
Med odgovori smo dobili dve bistveno različni rešitvi (glej tretjo številko str. 185): enakorobo pravilno tristrano prizmo in dvojno pokončno piramido nad kvadratom.

Rešitev je pa še mnogo več in zanimivo bi bilo poiskati vse rešitve naloge. Poglejmo si najprej še nekaj novih rešitev, ki jih ni bilo med vašimi!

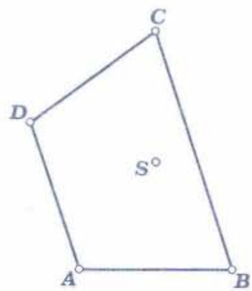
Židovska zvezda. Na sliki 1 vidimo dva enakostranična trikotnika ABC in DEF, ki ležita v vzporednih ravninah, zveznica središč trikotnikov je pravokotna na ravnini, lika pa sta zasukana za 60°. Pri tem pa mora biti razdalja med vzporednima ravninama taka, da je $\overline{AE} = \overline{AB} = a$. (Po Pitagorovem izreku izračunamo, da mora biti razdalja $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.)



Sl. 1a

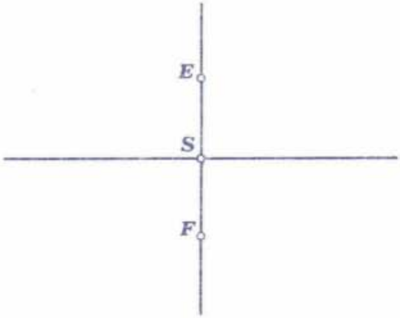


Sl. 1b

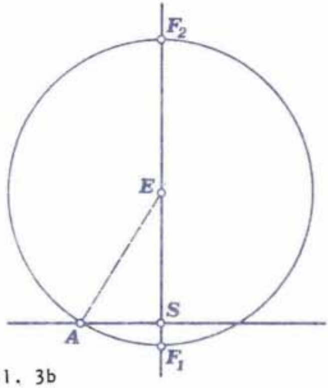


Sl. 2

$\frac{4}{5}$ pentagona. Na sliki 2 so štiri od petih oglišč pravilnega petkotnika (pentagona) A, B, C in D. Točka S je središče očrtanega kroga - to je le pomožna točka in ni med izbranimi, saj bi bila to že peta točka v isti ravnini. Pač pa izberemo naslednji dve točki na pravokotnici na ravnino v točki S. Peto točko E izberemo kjerkoli izven ravnine, za šesto pa imamo tri možnosti: lahko jo izberemo simetrično glede na ravnino (slika 3a), lahko pa vzamemo v šestilo razdaljo $r = \overline{EA} = \overline{EB} = \overline{EC} = \overline{ED}$ in z njo očrtamo kroglo okrog točke E. Prebodišči krogle s pravokotnico sta tudi možna položaja šeste točke F (slika 3b).

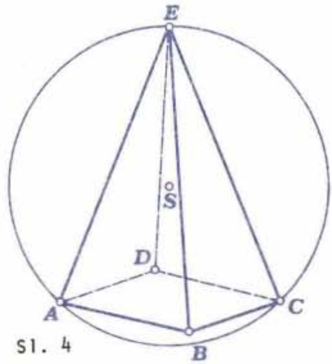


Sl. 3a



Sl. 3b

Kvadratna piramida s središčem očrtane krogle. Vsaki pokončni kvadratni piramidi je moč očrtati kroglo. Pet oglišč piramide in središče očrtane krogle kot šesta točka ustrezajo pogojem naloge (slika 4).



Sl. 4

Daleč sem od tega, da bi trdil, da sem našel vse možne rešitve. Vendar bi rad pokazal, kako naj bi se te naloge lotili, če bi jo hoteli v popolnosti rešiti.

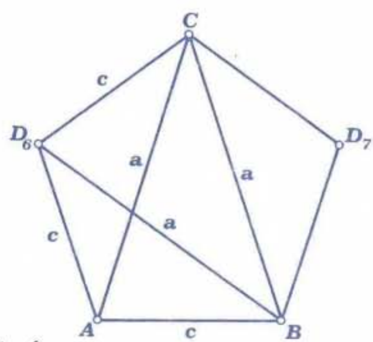
Začnimo s postavljanjem točk v prostor. Prve tri A, B, C morajo seve ležati v isti ravnini, kot pač vsake tri točke, obenem pa morajo po pogojih naloge biti v ogliščih enakokrakega trikotnika. Recimo, da je C vrh in AB osnovnica enakokrakega trikotnika, ki pa je zaenkrat še čisto poljuben. Kam postaviti četrto točko D? Tu sta dve možnosti, ali točka D leži v ravnini ABC ali pa ne leži. Nisem uspel najti nobenega primera, kjer ne bi ležale štiri točke v isti ravnini - pri židovski zvezdi na primer leže točke A, B, D, E v isti ravnini. To seveda ne pomeni, da take rešitve tudi res ni. Odgovora enostavno ne vem.

Zato vzemimo, da leži četrta točka D v ravnini ABC. Kje pa naj leži? Vsak položaj že ne bo dober, saj morajo biti enakokraki trikotniki ABD, ACD in BCD.

Na sliki 5* vidimo osnovni trikotnik ABC in še raznobarvne kroge in premice. Z rdečo barvo je označena množica točk v ravnini, kjer bi nam četrta točka D dala enakokrak trikotnik ABD. Na simetrali stranice AB namreč leže točke, ki so enako oddaljene od A in od B, zato dobimo v tem primeru enakokrak trikotnik ABD s stranico AB kot osnovnico. Če leži točka D na rdečem krogu s središčem v točki A, je seveda $\overline{AD} = \overline{AB}$ in je trikotnik enakokrak z osnovnico BD. Podobno sklepamo naprej in narišemo še zeleno in rjavo množico točk; zelena naredi enakokrak trikotnik ACD, rjava BCD. Ker pa je $\overline{AC} = \overline{BC}$, je zato krog s središčem v točki C zelen in rjav hkrati.

Rešitev naloge, položaj točke D, moramo iskati v preseku vseh treh raznobarvnih množic. S slike preberemo najprej točko D_1 - sečišče straničnih simetral oziroma središče trikotniku ABC očrtanega kroga. Torej je prva rešitev pod šifro "trikotnik s središčem". Točka D_2 nam ne da nič novega, saj je zdaj le točka C prevzela središčno vlogo v trikotniku ABD_2 in šifra je ista. Podobno je s točkama D_3 in D_4. Pač pa točka D_5 ustvari novo šifro "romb".

Na sliki zdaj ne opazimo nobenih presečišč vseh treh barv več, vendar ne smemo pozabiti, da morda pri kakšnem drugem razmerju med osnovnico in krakom trikotnika ABC padejo skupaj kakšna dvobarvna presečišča. Na sliki vidimo, da leže točke D', D'' in D''' blizu skupaj. Pa recimo, da so padle v isto točko; kaj lahko povemo o trikotniku ABC? Takrat seve padejo v isto točko tudi tri točke, ki leže simetrično glede na rdečo simetralo. Označimo skupno lego točk D', D'' in D''' z D_6 in simetrično ležečo točko D_7. Prepričali se bomo, da točke A, D_6, C, D_7, B leže v ogliščih pravilnega petkotnika (slika 6).



Sl. 6

---
* Slika 5 je na naslovni strani.

Ker leži točka D_6 na rdečem krogu, je $\overline{AD_6} = \overline{AB} = c$. Ker pa leži tudi na zeleni simetrali, je točka D_6 oddaljena od C ravno toliko kot A, torej za c. Če ponovimo sklepe za točko D_7, vidimo, da ima petkotnik enake stranice. Točka D_6 pa leži tudi na modrem krogu in je zato $\overline{BD_6} = \overline{BC} = a$. Trikotnika ABD_6 in D_6CA sta skladna, ker imata vse tri stranice skladne. Zato sta skladna tudi kota BAD_6 in AD_6C. Podobno sklepamo še za ostale kote trikotnika, ugotovimo, da so enaki, in petkotnik pravilen. Ali se odločimo za točko D_6 ali D_7, vedno dobimo štiri oglišča pravilnega petkotnika, zato šifra " $\frac{4}{5}$ petkotnika", ki smo jo uporabili že pri naštevanju nekaterih rešitev s šestimi točkami.

Sedaj pa nastane vprašanje, ali morda pri kakšnem drugačnem razmerju padejo skupaj kakšna druga presečišča. No, vse tri premice se sekajo vedno le v točki D_1, čim pa vzamemo presečišče le dveh premic, takoj dobimo isto točko. Trije raznobarvni krogi nimajo skupne točke - razen tedaj, ko je trikotnik ABC enakostraničen in se rdeči in zeleni krog okrog točke A zlijeta, ampak to nam da le nov izvod romba.

Če povzamemo: v ravnini imamo tri bistveno različne položaje štirih točk, ki ustrezajo pogojem naloge: trikotnik s središčem, romb in $\frac{4}{5}$ petkotnika.

Kam postaviti peto in šesto točko, pa je že zahtevnejša naloga, toliko bolj, ker si prostorske situacije ne moremo več narisati v različnih barvah na list papirja. Zato tu odnehajmo.

Peter Petek

PRAPRADEDKI IN PRAPRABABICE

Koliko največ prapradedkov in praprababic so imeli tvoji prapradedki in praprababice?

Rešitev: Ker ima vsak človek 8 prapradedkov in 8 praprababic, ima torej vsak izmed 16 praprastaršev tudi 16 prednikov v četrtem kolenu. Iskano število je torej 256 = 16 x 16.

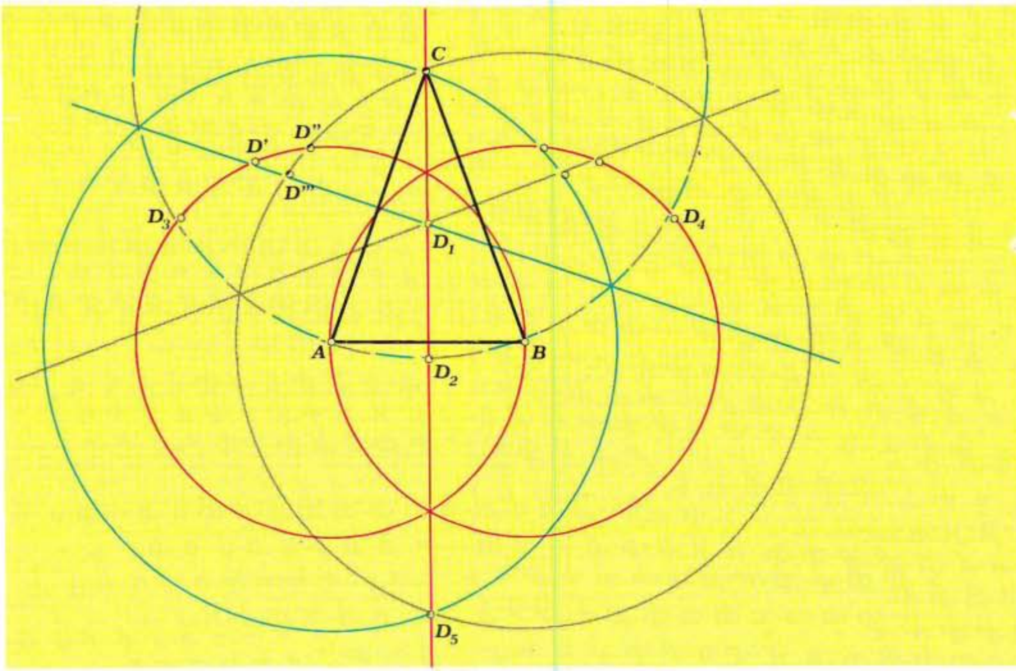
Število prednikov v osmem kolenu bo manjše v primeru, da so se med seboj poročali sorodniki v nižjih kolenih. Nariši si rodovno deblo!

Dušan Repovš

presek

4

IV
1976-77



LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS