PODVOJITEV KOCKE

V zapuščini grške matematične misli je tudi problem "o podvojitvi kocke".

S pomočjo šestila in neoznačenega ravnila konstruiraj rob kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot enotska kocka.

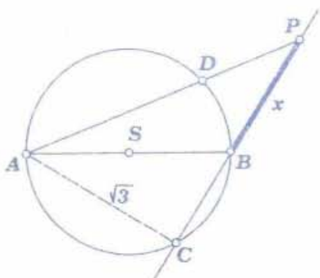
Danes vemo, da je ta problem s klasičnim orodjem nerešljiv. Bralec pa si dokaz zanj lahko poišče v knjigi : I. Vidav - Rešeni in nerešeni problemi matematike.

Obstaja pa, podobno kot za nekatere druge probleme, neklasična konstrukcija te naloge.

Poiskati moramo rob kocke x, za katero bo veljalo:

$$x^3 = 2 \quad \text{ali} \quad x^3 - 2 = 0 \tag{1}$$

Konstrukcija



Točka C leži na krožnici enotskega kroga tako, da je $\measuredangle BCS = 60^{\circ}$.
Na premici (B,C) poiščemo točko P s pomočjo *označenega ravnila* s premikanjem po premici, da so A, D, P kolinearne točke in je $\overline{DP} = 1$.
Potem je daljica $\overline{BP}$ iskani rob x !

Dokaz

Po izreku o potenci točke na krog velja

$$\overline{PA} \cdot \overline{PD} = \overline{PC} \cdot \overline{PB}$$

ali

$$\overline{PA} = (x + 1)\, x \tag{2}$$

Izraz (2) kvadriramo in $\overline{PA}^2$ nadomestimo z vsoto kvadratov obeh katet ($\overline{AC} = \sqrt{3}$ in $\overline{CP} = x + 1$) pravokotnega trikotnika ACP.

$$(\sqrt{3})^2 + (x + 1)^2 = (x + 1)^2\, x^2$$

Enačbo uredimo in dobimo

$$\underline{(x^3 - 2)}(x + 2) = 0 \tag{3}$$

Od realnih pozitivnih rešitev te enačbe (3) pride v poštev le tista, ki je skrita v podčrtanem delu enačbe, to pa je rešitev, ki smo si jo postavili za cilj pod (1).

Oglejmo si še "posplošeni problem o podvojitvi kocke". V tem primeru iščemo tako daljico x, ki zadošča enačbi:

$$x^3 = ba^2 \tag{4}$$

pri čemer zahtevamo, da je $a > b$. Če temu ni tako, lahko vedno najdemo tak $k \in N$, da to dosežemo:

$$x^3 = b/k^2 \cdot (ak)^2$$

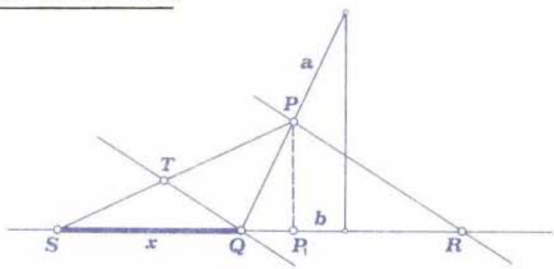
Enačbo (4) pomnožimo prvič z x: $x^4 = ba^2x$; in drugič z b: $bx^3 = a^2b^2$ in dobljeni enačbi seštejemo:

$$x^2(x^2+bx) = a^2(b^2+bx) \tag{5}$$

V enačbi (5) izraza v obeh oklepajih zapišemo kot razliko dveh kvadratov: $x^2((x + b/2)^2 - b^2/4) = a^2((b + x/2)^2 - \underline{x^2/4})$. Podčrtani del prenesemo na levo stran enačbe in obe strani enačbe korenimo s kvadratnim korenom in preuredimo v naslednje razmerje:

$$\sqrt{(x + b/2)^2 + (a^2-b^2)/4} \ : \ (x + 2b) = a/2 : x \tag{6}$$

<u>Konstrukcija količine x:</u>



Narišemo pravokotni trikotnik s hipotenuzo a in kateto b. Na nosilki katete b poiščemo točko R ($\overline{QR} = 2b$); P je razpolovišče hipotenuze a. Skozi Q potegnemo vzporednico k premici (P,R). Označeno ravnilo pomikamo po nosilki katete b tako, da so S, T, P kolinearne točke in je $\overline{ST} = a/2$. $\overline{SQ}$ je potem iskani rob x.

<u>Dokaz</u>

$\overline{P}_1$ je srednjica pravokotnega trikotnika s hipotenuzo a in kateto b: $\overline{P}_1 = \sqrt{(a^2-b^2)/4}$

Iz slike razberemo naslednje sorazmerje:

$$a/2 : x = \overline{SP} : \overline{SR}$$

$\overline{SP}$ je hipotenuza ΔSP_1P in zato velja:

$$a/2 : x = \sqrt{(x+b/2)^2 + (a^2-b^2)/4} \; : \; (x+2b)$$

To pa je izraz, ki smo ga dobili pod (6) in x je res iskani rob kocke!

Naloga Konstruiraj rob kocke, ki bo prostorninsko enaka kvadru z robovi $a < b < c$!

Rešitev Osnovno ploskev kvadra spremenimo v ploščinsko enak kvadrat s pomočjo Evklidovega izreka v pravokotnem trikotniku. Tako pridemo do posplošenega problema o podvojitvi kocke in nalogo znamo rešiti!

Danijel Bezek