Rešitve počitniških nalog iz 6. številke Preseka 33

1 Rešitve nalog za mesec junij

<u>*Rešitev 1.1.*</u> $a(a+b)(a+c) = a^3 + a^2b + a^2c + abc = a^2(a+b+c) + abc = a^2 \cdot 0 + 2006 = 2006.$

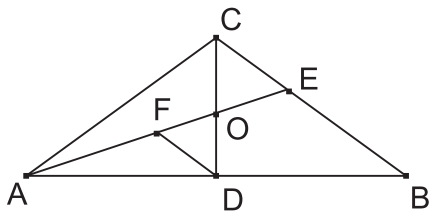
<u>*Rešitev 1.2.*</u> Uporabimo formulo za razliko kvadratov:

$$96 \cdot 104 = (100-4) \cdot (100+4) = 10000 - 16 = 9984.$$

<u>*Rešitev 1.3.*</u> Zapišimo $202^{303} = ((2 \cdot 101)^3)^{101} = (2^3 \cdot 101^3)^{101}$ in $303^{202} = ((3 \cdot 101)^2)^{101} = (3^2 \cdot 101^2)^{101}$. Ker je $2^3 \cdot 101^3$ več kot $3^2 \cdot 101^2$, je prvo število večje.

<u>*Rešitev 1.4.*</u> Če z x označimo število pravilnih odgovorov in z y število napačnih, potem moramo rešiti enačbo $8x - 5y = 0$ oziroma $8x = 5y$. Ker sta števili 8 in 5 tuji mora biti x večkratnik števila 5 in y večkratnik števila 8. Torej $x = 5k_1$ in $y = 8k_2$ za neki celi števili k_1 in k_2. Od tod dobimo $40k_1 = 40k_2$ in zato $k_1 = k_2$. Ker je $x + y = 26$, sledi $k_1 = k_2 = 2$ in zato $x = 10$ in $y = 16$.

<u>*Rešitev 1.5.*</u> Naj bo $CD \cap AE = \{O\}$, glej sliko 1.



Slika 1: Enakokrak trikotnik ABC

Ker je $\measuredangle ACB = 108°$ sledi, da je $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 36°$. Zato je $\measuredangle CAE = 18°$. Sedaj pa prav tako lahko izračunamo $\measuredangle AEC = 180° - \measuredangle CAE - \measuredangle ACE = 180° - 18° - 108° = 54°$. Ker višina CD leži na simetrali kota $\measuredangle ACB$, velja da je $\measuredangle OCE = 54°$. Torej je trikotnik OCE enakokrak z vrhom točki O in velja $|OC| = |OE|$. Naj bo DF srednjica trikotnika ABE. Srednjica je vzporedna nasprotni stranici, torej je $DF||CE$ in velja $\measuredangle ODF = \measuredangle OFD = 54°$. Zato je tudi trikotnik DOF enakokrak in velja $OD = OF$. Ker je $|OC| = |OE|$ in $|OD| = |OF|$, sledi da je $|OC| + |OD| = |OE| + |OF|$ oziroma $|CD| = |EF|$. Točka F je ravno razpolovišče daljice AE zato velja $|AE| = 2|EF|$ oziroma $|AE| = 2|CD|$, kar smo želeli pokazati.

Rešitev 1.6. To je na primer trditev

$$(n-7)(n-31)(n-2006) \neq 0.$$

Rešitev 1.7. Uporabimo formulo za razstavljanje vsote kubov:

$$\begin{aligned} 8027 &= (20)^3 + 3^3 = \\ &= (20+3)\cdot(400-60+9) = \\ &= 23 \cdot 349. \end{aligned}$$

Rešitev 1.8. Najprej izračunajmo $n^2+(n+1)^2 = n^2+n^2+2n+1 = 2n^2+2n+1$. Iz enakosti $2n^2+2n+1 = 111\ldots11$ dobimo $2n^2+2n = 111\ldots10$, enakost delimo z 2: $n^2+n = 555\ldots5$. Če je $n=2k$, potem je $n^2+n = 4k^2+2k = 2(2k^2+k)$ sodo število. Ker je $555\ldots5$ liho število, zato enačba v tem primeru nima rešitev. V primeru, ko je $n = 2k-1$, je $n^2+n = 4k^2-4k+1+2k-1 = 2(2k^2-k)$ spet sodo število, zato vsota kvadratov dveh zaporednih naravnih števil nikoli ni število, katerega vse števke so enake 1.

Rešitev 1.9. Leva trojica števk šestmestnega števila naj sestavlja trimestno število a, desna polovica pa število b. Prvotno število je tedaj enako $1000a+b$. Z zamenjavo obeh trojic pa dobimo

$$1000b + a = 6(1000a+b)$$

oziroma

$$857a = 142b.$$

Števili 857 in 142 sta si tuji, zato velja $a = 142$ in $b = 857$. Torej je prvotno število enako 142857.

Rešitev 1.10. Enakost $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$ je ekvivalentna enakosti $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$. Ker je kvadrat vsakega izraza nenegativen, od tod sledi pogoj $a = b = c$.

Rešitev 1.11. Fibonaccijevo zaporedje je podano s predpisom $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ in $F_1 = F_2 = 1$. Če torej iz tega zaporedja vzamemo tri Fibonaccijeva števila a, b in c (urejena po velikosti od manjšega do večjega), bo vedno veljalo $a+b \leq c$. Fibonaccijeva števila a, b in c torej ne morejo nikoli predstavljati stranic trikotnika, saj ne ustrezajo trikotniški neenakosti $a+b > c$.

Rešitev 1.12. Za vsak člen vsote na levi strani uporabimo neenakost

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}\ ;\ a,b>0,\ a\neq b$$

in že dobimo

$$\begin{aligned} &\sqrt{1\cdot 2} + \sqrt{2\cdot 3} + \cdots + \sqrt{(n-1)\cdot n} + \sqrt{n\cdot 1} < \\ &< \frac{((1+2)+(2+3)+\cdots+((n-1)+n)+n+1)}{2} = \\ &= 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev 1.13. Razvijmo polinom p po potencah spremenljivke x

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

in izračunajmo

$$\begin{aligned} S(x) &= p(Q(x) + x) - x = \\ &= a_0 + a_1(Q(x) + x) + \cdots + a_n(Q(x) + x)^n - x = \\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + Q(x)R(x) - x = \\ &= p(x) - x + Q(x)R(x) = Q(x)(1 + R(x)), \end{aligned}$$

kjer je $R(x)$ polinom stopnje $n-1$.

Rešitev 1.14. Poslance razdelimo v dve skupini na poljuben način. Poglejmo koliko nasprotnikov ima posamezen poslanec v svoji skupini in označimo z N vsoto vseh teh števil. Če ima nek poslanec vsaj 2 nasprotnika v svoji skupini, potem ima v drugi skupini kvečjemu 1 nasprotnika. Če ta isti poslanec prestopi k drugi skupini, potem se število N zagotovo zmanjša. Podobno lahko storijo tudi drugi poslanci, ki imajo v svoji skupini vsaj 2 nasprotnika. Vsakič se bo N ustrezno zmanjšal. Število N bo tako prej ali slej doseglo svojo najmanjšo vrednost. Hkrati pa bo s tem izpolnjen pogoj iz naloge.

Rešitev 1.15. Naj bo $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = a$, $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = b$ in $a + b = x$. Oglejmo si

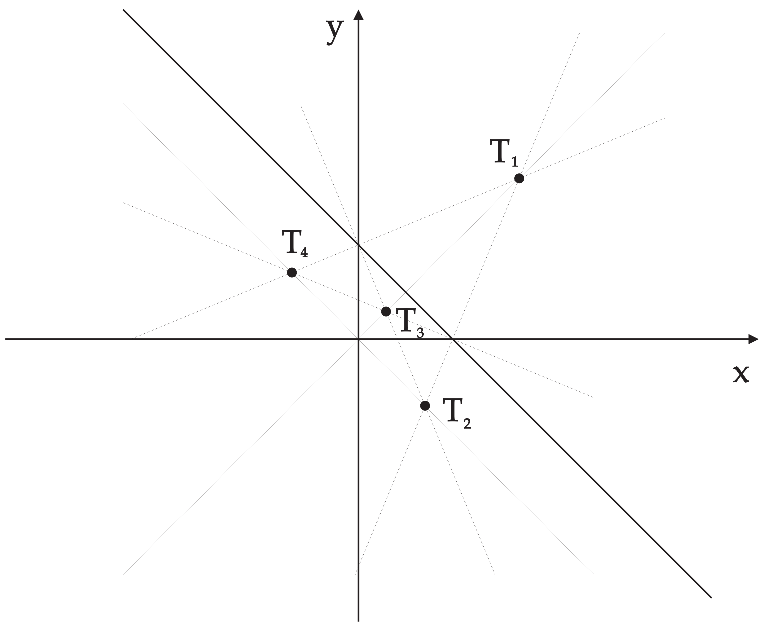
$$\begin{aligned} x^3 &= (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = \\ &= \left(2+\sqrt{5}\right) + \left(2-\sqrt{5}\right) + 3\sqrt[3]{4-5} \cdot x = \\ &= 4 - 3x. \end{aligned}$$

Od tod dobimo enačbo $x^3 + 3x - 4$, ki ima eno samo realno rešitev $x = 1$. Nalogo lahko rešimo tudi tako:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + 2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}\right).$$

Ker je $(1+\sqrt{5})^3 = 16 + 8\sqrt{5}$ in $(1-\sqrt{5})^3 = 16 - 8\sqrt{5}$ sledi, da je

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{5})^3}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}\right) = 1.$$



<u>*Rešitev 1.16.*</u>

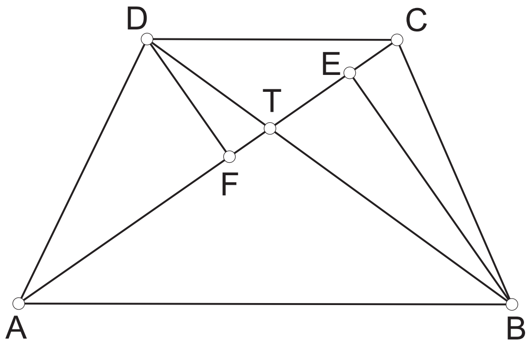
Točke, ki so enako oddaljene od dveh podanih premic ležijo na eni izmed simetral kotov, ki ju določata ti dve premici. Zato vse točke, ki so enako oddaljena od x osi, y osi in premice $x+y=2$ ležijo hkrati na simetrali lihih ali sodih kvadrantov in na simetrali kakšnega kota, ki ga določata os x ali y in premica $x+y=2$. Simetrali kotov, ki ju določata os x in premica $x+y=2$ sta premici

$$y=\frac{-1}{\sqrt{2}+1}(x-2) \quad \text{in} \quad y=(\sqrt{2}+1)(x-2)\,.$$

Presečišča teh dveh premic z simetralo lihih in simetralo sodih kvadrantov so točke $T_1(2+\sqrt{2},2+\sqrt{2}), T_2(\sqrt{2},-\sqrt{2}), T_3(2-\sqrt{2},2-\sqrt{2})$ in $T_4(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

<u>*Rešitev 1.17.*</u> Označimo z (a,b,c) število delcev po posameznih tipih A, B in C ob določenem času. Na začetku torej velja $(a,b,c)=(20,21,40)$. Poglejmo si kaj se zgodi, če trčita delec tipa A in delec tipa B. Potem je število delcev po posamezih tipih enako $(a-1,b-1,c+2)$. Opazimo lahko, da se razlika med številom delcev tipa A in tipa B ni spremenila medtem, ko pa se je razlika med številom delcev tipa A in tipa C povečala za 3. Enako velja tudi za razliko med delci tipa B in C. Podoben sklep velja tudi za preostali dve možnosti trkov različnih delcev. Tako ugotovimo, da se pri vsakem trku ohranja ostanek razlik $b-a$, $c-a$ in $c-b$ pri deljenju s 3. Ker na začetku velja $b-a=1$, $c-a=20$ in $c-b=19$ so ustrezni ostanki pri deljenju s 3 enaki 1,2 in 1. Torej se nikoli ne more zgoditi, da bi bila ena izmed razlik enaka 0, saj smo zgoraj ugotovili, da se ostanki razlik pri deljenju s 3 ohranjajo pri vsakem trku.

Rešitev 1.18. Označimo z E nožišče višine BE trikotnika BCT, z F pa nožišče višine DF trikotnika ATD.



Pravokotna trikotnika TBE in TDF sta si podobna, zato velja

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{DT}}$$

iz podobnosti trikotnikov ABT in CDT pa dobimo

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{CT}}.$$

Od tod razberemo enakosti

$$\frac{S_2}{S_4} = \frac{\overline{BE} \cdot \frac{\overline{CT}}{2}}{\overline{DF} \cdot \frac{\overline{AT}}{2}} = 1$$

in

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{\overline{CT} \cdot \frac{\overline{BE}}{2}}{\overline{CT} \cdot \frac{\overline{DF}}{2}} = \frac{\overline{AT} \cdot \frac{\overline{BE}}{2}}{\overline{AT} \cdot \frac{\overline{DF}}{2}} = \frac{S_1}{S_4}$$

od koder najdemo iskano zvezo

$$S_2 = S_4 = \sqrt{S_1 S_3}.$$

Rešitev 1.19. Pomnožimo celoten produkt z $1 = \frac{1}{4}\left(5^{2^0} - 1\right)$. Ker je

$$\left(5^{2^0} - 1\right)\left(5^{2^0} + 1\right) = \left(5^{2^1} - 1\right) \text{ in}$$
$$\left(5^{2^1} - 1\right)\left(5^{2^1} + 1\right) = \left(5^{2^2} - 1\right), \text{ itd.,}$$

dobimo na koncu rezultat $\frac{1}{4}\left(5^{2^{n+1}} - 1\right)$. V splošnem je za poljubno osnovo $x \neq 1$ produkt enak $\frac{1}{x-1}\left(x^{2^{n+1}} - 1\right)$.

Rešitev 1.20. Vsako naravno število x je oblike $3n-1$ ali $3n$ ali $3n+1$. Če vstavimo te možnosti v našo enačbo, dobimo po vrsti $3\left(3n^2-2n-y^2\right)=16$ ali $3\left(3n^2-y^2\right)=17$ ali $3\left(3n^2+2n-y^2\right)=16$. Ker v množici naravnih števil število 3 ne deli niti števila 16 niti števila 17, naša enačba nima rešitev v množici naravnih števil.

Rešitev 1.21. Ker je $f(0)=p$, lahko pišemo $f(x)=x\cdot q(x)+p$ (izrek: vrednost polinoma f v točki x_0 je enaka ostanku pri deljenju polinoma f z lineranim polinomom $x-x_0$). Potem pa lahko pišemo $a=f(a)=a\cdot q(a)+p$, od koder dobimo $a(1-q(a))=p$. Torej a deli p. Ker je $p>a$ in je p praštevilo, je edina možnost $a=1$ leto. Polinom $f(x)=x^2-2x+2$ je samo eden izmed neskončne množice polinomov, ki jih je lahko profesorica zapisala na tablo.

Rešitev 1.22. Za $x,y>0$ velja ocena:

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y>x+y-\frac{2xy}{x+y}=\frac{(x+y)^2-2xy}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{x+y}.$$