Rešitve počitniških nalog iz 6. številke Preseka 33

2 Rešitve nalog za mesec julij

<u>*Rešitev 2.1.*</u> Iz $a(a-1) - a(a-2) - 3 = 2$ izračunamo, da je $a = 5$, nato pa še $\sqrt[3]{(2-5)^2 + (5+1)^2 + 19} = \sqrt[3]{(-3)^2 + 6^2 + 19} = \sqrt[3]{64} = 4$.

<u>*Rešitev 2.2.*</u> $8^{77}6^5 5^{236} = (2^3)^{77}2^5 3^5 5^{236} = 2^{236}3^5 5^{236} = 3^5 10^{236} = 243 \cdot 10^{236}$. Torej je število števk v desetiškem zapisu števila $8^{77}6^5 5^{236}$ enako 239.

<u>*Rešitev 2.3.*</u> Števila so urejena po abecednem vrstnem redu, tako kot jih izgovarjamo.

<u>*Rešitev 2.4.*</u> V splošnem velja: če imata poljubna dva lika s ploščinama a in b skupen presek s ploščino x, potem sta ploščini neprekrivajočih se delov $a - x$ in $b - x$. Razlika ploščin teh neprekrivajočih se delov je tedaj $|(a-x) - (b-x)| = |a - b|$. V našem primeru torej $\left|\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 5^2\right| = 9\pi$ $enot^2$.

<u>*Rešitev 2.5.*</u>

1. Najprej izračunamo, da meri zunanji kot $\frac{2}{15} \cdot 180° = 24°$. Vsota zunanjih kotov n-kotnika je $360°$, zato iz $n \cdot 24° = 360°$ dobimo $n = 15$. Torej gre za petnajstkotnik.
2. Iz vsakega oglišča gre $n - 3 = 12$ diagonal. Ker sta po dve enako dolgi, ima petnajstkotnik 6 skupin enako dolgih diagonal.
3. Vseh diagonal je $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{15 \cdot 12}{2} = 90$. Ker je skupin šest, je v vsaki skupini 15 enako dolgih diagonal.

<u>*Rešitev 2.6.*</u> Domov so prišli 10 minut prej kot običajno, kar pomeni, da so prihranili 10 minut vožnje do postaje in nazaj. Ob predpostavki, da mama in oče vedno vozita enako hitro, sledi, da sta prihranila 5 minut vožnje v eno smer in 5 minut vožnje v drugo smer. Torej sta ga pobrala 5 minut prej kot običajno, to je ob 12:55. Kar pomeni, da je Janezek hodil 55 minut preden se je srečal z mamo in očetom.

<u>*Rešitev 2.7.*</u> Za učenca, ki se je zbudil prvi, velja, da je vsak izmed preostalih učencev zadremal pred njim. Sicer ne bi obstajal skupen trenutek, ko sta oba skupaj dremala. Iskan trenutek je tik preden se je zbudil prvi izmed njih, saj za vse ostale velja, da so se zbudili kvečjemu kasneje.

<u>*Rešitev 2.8.*</u>

1. $A = \frac{2x-14}{x-4} = 2 - \frac{6}{x-4}$, torej je A celo število natanko tedaj, ko je $x \in \{-2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10\}$.
2. A ima najmanjšo vrednost, ko ima ulomek $\frac{6}{x-4}$ največjo vrednost, to pa je tedaj, ko ima $x - 4$ najmanjšo vrednost. Pri dani zahtevi $x \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$ je iskani $x = 5$.

Rešitev 2.9. Naj bo starost osebe xy in n število članov v njeni družini (naloga deluje tudi pri osebah starosti xyz, kar lahko bralec teoretično zagotovo preveri, praktično pa nekoliko težje...). Potem lahko pišemo $10x + y$. Ko na danem izrazu izvedemo vse zahtevane računske operacije, dobimo $100x + 10y + n$, kar nam predstavlja število xyn. Od tod vidimo tudi pogoj $n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Rešitev 2.10. Iz pogoja

$$r = \frac{ax + b}{cx + d} \in \mathbb{Q}$$

dobimo enakost

$$(a - rc)x = rd - b$$

iz katere razberemo, da velja $a = rc$, saj bi v nasprotnem primeru x bilo racionalno število. Torej je tudi $b = rd$. Tako dobimo pogoj $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Dokazati je potrebno, da je tudi zadosten. Naj bo $p = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \in \mathbb{Q}$. Izračunajmo

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{pcx + pd}{cx + d} = p \in \mathbb{Q}.$$

Rešitev 2.11. V vaših mislih se odvija naslednji račun:

$$n \overset{\cdot 3}{\Longrightarrow} 3n \overset{+10}{\Longrightarrow} 3n + 10 \overset{-4}{\Longrightarrow} 3n + 6 \overset{:3}{\Longrightarrow} n + 2 \overset{-n}{\Longrightarrow} 2.$$

Končen rezultat je seveda neodvisen od izbire začetnega n.

Rešitev 2.12. Denimo, da velja $\alpha = 60°$ in $\beta = 45°$. Potem leži najdaljša stranica $c = 1$ nasproti kota $\gamma = 75°$, ki ga višina v_c z nožiščem N razdeli na kota

$$\measuredangle ACN = 30° \qquad \measuredangle NCB = 45°.$$

Iz tega sledi, da je $v_c = \overline{AN}\sqrt{3} = \overline{NB}$ in $1 = \overline{AN} + \overline{NB} = (\frac{\sqrt{3}}{3} + 1)v_c$. Ploščina trikotnika potemtakem meri $\frac{v_c}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

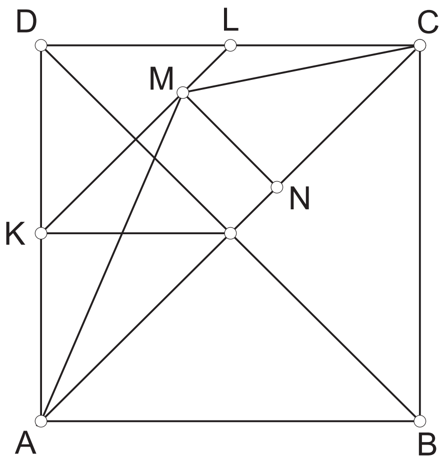
Rešitev 2.13. Če je $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = k$ celo število, potem je $a^2 + b^2 = abk$. Od tod je $b^2 = a(bk - a)$, torej a deli b^2. Podobno je tudi $a^2 = b(ak - b)$, torej tudi b deli a^2. Kar pa je možno le za $a = \pm b$.

Rešitev 2.14.

1. Kota CED in DFG merita vsak po $\frac{\pi}{2}$. Ker imata trikotnika DGF in DCE kota pri oglišču D enaka, sta podobna. Označimo $DG = y$ in $FG = x$. Ker je $y : DC = x : CE$, torej $\frac{y}{5} = \frac{x}{1}$, je $y = 5x$. Po drugi strani je po Pitagorovem izreku $y^2 = x^2 + 6^2$. Od tod dobimo $25x^2 - x^2 = 36$, $x^2 = \frac{36}{24}$ in $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. Označimo z E presečišče krožnice s središčem v A_k in tangente p_2. Kota A_kED in DFG merita vsak po $\frac{\pi}{2}$. Ker imata trikotnika DGF in DA_kE tudi kota pri oglišču D enaka, sta podobna. Označimo $DG = y$ in $FG = x$. Iz $y : DA_k = x : A_kE$ dobimo $y = (2k-1)x$. Po drugi strani je po Pitagorovem izreku $y^2 = x^2 + (2n)^2$. Od tod dobimo $(2k-1)^2x^2 = x^2 + 4n^2$, in zato je $(4k^2-4k)x^2 = 4n^2$. Dolžina stranice FG meri $x = \frac{n}{\sqrt{k^2-k}}$.

Rešitev 2.15. Če ima štirikotnik $ABCM$ trikrat večjo ploščino kot štirikotnik $AMCD$, je ploščina trikotnika ACD dvakrat večja kot ploščina trikotnika ACM. Ker imata skupno stranico AC, meri višina MN trikotnika ACM četrtino diagonale BD. Točke M ležijo na daljici KL, ki veže razpolovišči stranic AD in DC.



Rešitev 2.16. Če želimo, da bo izjava resnična, morata biti števili zapisani v različnih številskih sestavih, tj. $342_a = 97_b$. Torej rešujemo enačbo $3a^2+4a+2 = 9b+7$. Število $b = \dfrac{3a^2+4a-5}{9}$ je naravno število, če je število a oblike $9k+5$ (ker mora biti $3a^2+4a-5 = 9k$), kjer je $k \in \mathbb{N}_0$. Od tod pa dobimo neskončno množico rešitev
$\big\{(a,b)\,;\ a = 9k+5,\ b = 27k^2+34k+10,\ k \in \mathbb{N}_0\big\} = \{(5,10),(14,71),\ldots\}$.

Rešitev 2.17. Naj bo x_1 ničla funkcije f in $2+x = x_1$. Tedaj je $0 = f(x_1) = f(2+x) = f(2-x)$. Torej je tudi $x_2 = 2-x = 4-x_1$ ničla funkcije f. To pomeni, da ničle nastopajo v parih in vsota enega para ničel je 4. Edina ničla, ki se lahko pojavi samostojno je $x_0 = 2$. Če je $x_0 = 2$ ena izmed ničel funkcije f, potem ima f liho število ničel sicer ima sodo število ničel. V vsakem primeru je vsota ničel enaka $2n$.

Rešitev 2.18. Število N lahko zapišemo kot

$$N = a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0,$$

kjer so $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ števke števila N. Potem je

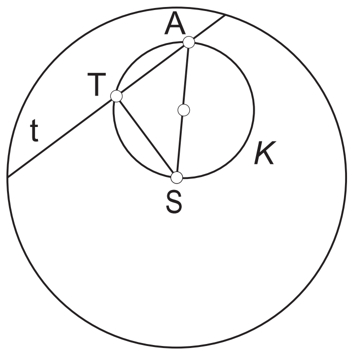
$$M = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1}10 + a_n$$

in

$$N - M = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 10) + \cdots + a_1(10 - 10^{n-1}) + a_0(1 - 10^n).$$

Ker 9 deli $(10^n - 1)$, $(10^{n-1} - 10)$, $\ldots$, $(10 - 10^{n-1})$, deli tudi število $N - M$.

Rešitev 2.19. Daljica ST, ki veže središče S kroga in razpolovišče T tetive t skozi točko A, je pravokotna na t in zato tudi na TA. Vsaka točka T za katero velja $TA \perp ST$ ali $T \in \{A, S\}$, je razpolovišče tetive skozi A in T. Vse takšne točke ležijo na krožnici K, s premerom SA. Krožnica K je iskana množica.



Rešitev 2.20. Pišemo lahko $q(x) = \dfrac{x^{2007} + 1}{x + 1}$ in potem je

$$p(i) = q(i) + 1 = \frac{i^{2007} + 1}{i + 1} + 1 = \frac{-i - 1}{i + 1} + 1 = -1 + 1 = 0.$$