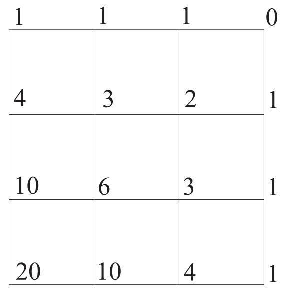
Rešitve počitniških nalog iz 6. številke Preseka 33

3 Rešitve nalog za mesec avgust

Rešitev 3.1. Opazimo, da je ena 2 pred prvo 3, dve 2 pred drugo 3 in v splošnem n 2 pred n-to 3. Pred stoto 3 je torej $1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$ dvojk.

Rešitev 3.2. Na 20 načinov. Rešitev je podana na sliki 2, pri čemer je v vsakem križišču zapisano na koliko načinov lahko pridemo do njega iz začetne pozicije ob upoštevanju prometnega režima.



Slika 2: Rešitev naloge

Rešitev 3.3. Cela števila oblike x^4 in y^4 se vedno končujejo z eno izmed naslednjih številk 0,1,5 ali 6. Vsota dveh takih števil se torej lahko konča z eno izmed naslednjih števk 0,1,2,5,6 ali 7. Torej naša enačba nima rešitev med celimi števili, saj je zadnja števka števila 123456789 enaka 9.

Rešitev 3.4. Vsako naravno število lahko zapišemo v obliki $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ ali $4k + 3$, kjer je k naravno število ali 0. Kvadrati teh števil so $16k^2 = 8(2k^2)$, $16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1$, $16k^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + 2k) + 4$ in $16k^2 + 24k + 9 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1$. Torej je ostanek pri deljenju kvadrata poljubnega naravnega števila z 8 lahko 0, 1 ali 4. S seštevanjem katerihkoli treh ostankov ne moremo dobiti 7, zato tudi vsota $a^2 + b^2 + c^2$ pri deljenju z 8 ne more dati ostanka 7.

Rešitev 3.5. Iz enačbe $x + \frac{1}{10}x - \frac{1}{3}(x + \frac{1}{10}x) = 440$ izračunamo, da je $x = 600$. Začetna cena je bila 600 SIT.

Rešitev 3.6. Za $p = 2$ trditev ne velja, saj $2^2 + 2^2 = 8$ ni praštevilo. Za $p = 3$ dobimo praštevilo 17. Za praštevila $p > 3$ velja, da je bodisi $p = 6k + 1$, bodisi $p = 6k - 1$, za nek $k \in \mathbb{N}$. Potem pa velja, da je $2^p = 3n - 1$ in $p^2 = 3m + 1$, za neka $m, n \in \mathbb{N}$. Torej je v primeru, ko je $p > 3$, število $2^p + p^2$ vedno deljivo s 3. Torej je 3 edino praštevilo za katerega velja trditev iz naloge.

Rešitev 3.7. Iz formule za ploščino trikotnika lahko ugotovimo, da je razmerje ploščin trikotnikov z enakima višinama enako razmerju njunih osnovnic. Trikotnika $\triangle ADC$ in $\triangle DBC$ imata enaki višini na osnovici m in n, zato je $\frac{m}{n} = \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle DBC}}$. Razdalja od točke D do stranice b je enaka razdalji od točke D do stranice a, ker leži D na simetrali kota γ. Torej imata trikotnika $\triangle CAD$ in $\triangle BCD$ enaki višini na osnovnici b in a in zato je $\frac{b}{a} = \frac{S_{\triangle CAD}}{S_{\triangle BCD}}$.
Iz obeh dobljenih razmerij pa sledi iskana zveza $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$.

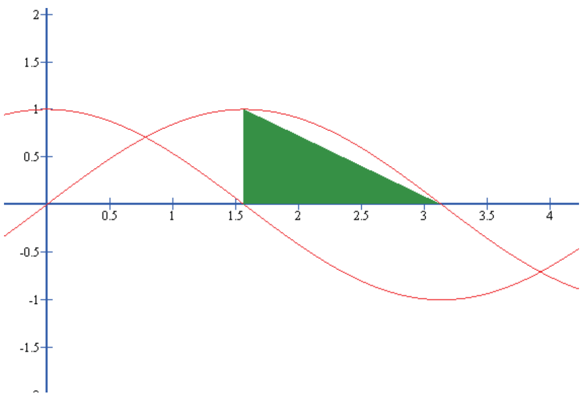
Rešitev 3.8. Ker je $2^{25} = 2 \cdot 2^{24} = 2^{24} + 2^{24}$, lahko pišemo $\left(2^8\right)^3 + \left(2^6\right)^4 = \left(2^5\right)^5$ in od tod dobimo $a = 256$, $b = 64$ in $c = 32$.

Rešitev 3.9. Z opazovanjem vzorca $3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, 3^6 = 729\ldots$, ugotovimo, da se na mestu enic pojavi zaporedje $3, 9, 7, 1, 3, 9, \ldots$, od koder lahko sklepamo, da imajo potence oblike 3^{4n+1} enico 3, potence 3^{4n+2} enico 9, potence 3^{4n+3} enico 7 in potence 3^{4n} enico 1. Ker je $3^{2006} = 3^{4 \cdot 501+2}$, ima naša številka enico 9.

Rešitev 3.10. Če da neko število pri deljenju s 3 ostanek 1, potem da njegov dvakratnik ostanek 2. Od tod lahko sklepamo, da sode potence števila 2 dajo pri deljenju s 3 ostanek 1, lihe pa 2. Torej je število $2^n + 1$ deljivo s 3 natanko za vse lihe potence n.

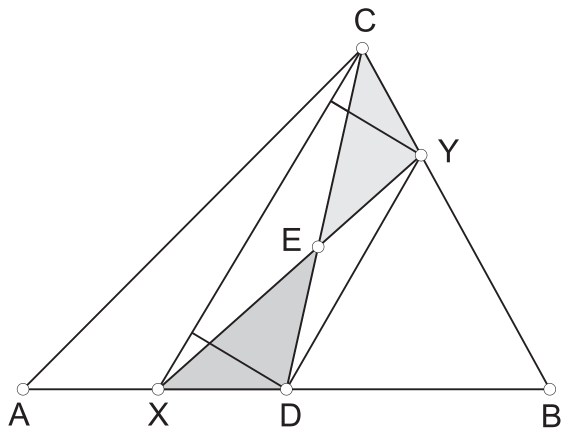
Rešitev 3.11. $k = \frac{p+q}{2}$ je aritmetična sredina števil p in q, torej je $p < k < q$. Ker pa sta p in q zaporedni praštevili, je k nujno sestavljeno število.

Rešitev 3.12.



Slika 3: Trikotnik ABC

Trikotnik ABC je pravokoten z dolžinami katet $a = 1$ in $b = \frac{\pi}{2}$. Njegova ploščina je $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\pi}{4}$. Glej sliko 3.



Rešitev 3.13.

Točka X naj leži na stranici AB, katere razpolovišče označimo z D. Premica skozi D, ki je vzporedna CX, seka eno od stranic BC in AC v točki Y. Pokažimo, da daljica XY ploščinsko razpolovi trikotnik ABC.

Trikotnika CXD in CXY v trapezu $CXDY$ imata skupno stranico CX. in enaki višini nanjo, zato imata enaki ploščini. Če od obeh odvzamemo trikotnik CXE, ugotovimo, da sta tudi ploščini trikotnikov EXD in CEY enaki med seboj. Težiščnica CD razdeli trikotnik ABC na ploščinsko enaka dela. Če trikotniku BCD odvzamemo tistega od trikotnikov EXD in CEY, ki leži v njem, in dodamo drugega, dobimo del trikotnika ABC na eni strani daljice XY, ki tedaj res ploščinsko razpolavlja trikotnik ABC.

Rešitev 3.14. Ker je $x - y = \frac{x}{y} = a$, dobimo od tod $x = \frac{a^2}{a-1}$ in $y = \frac{a}{a-1}$ ter $a \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

Rešitev 3.15. Nalogo lahko rešimo na različne načine: najhitrejši način je $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, v nižjih letnikih srednje šole pa s predstavo gostov kot oglišči konveksnega n-kotnika, ki mu iščemo vsoto vseh diagonal in stranic, torej $\frac{n(n-3)}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Rešitev 3.16. Avtobus številka 5 pride na postajo 1 minuto prej kot avtobus številka 7. Zato se Mojca pelje z avtobusom številka 7 le v primeru, ko pride na postajo v eno minutnem intervalu, potem ko je avtobus številka 5 že odpeljal. V primeru, da pride na postajo v preostalem devet minutnem intervalu pa se odpelje z avtobusom številka 5. Ker prihaja na postajo ob povsem naključnih časih, je veliko večja verjetnost, da bo prvi pripeljal na postajo avtobus številka 5.

Rešitev 3.17. Iz cvetličarkine ponudbe lahko sklepamo, da je $y < 2$, torej je $y = 1$ (y je naravno število). Če pogledamo ceno ene rože v centih, dobimo iz besedila naloge zvezo

$$\frac{100}{x} - \frac{200}{x+10} = \frac{80}{12},$$

od koder dobimo enačbo $x^2 + 25x - 150 = 0$, ki ima eno pozitivno rešitev $x = 5$.

Rešitev 3.18. Seveda. Če označimo kandidate z A, B in C ter tretjina volilcev meni, da si kandidati po primernosti sledijo takole

$$1.\ A, \quad 2.\ B, \quad 3.\ C,$$

druga tretjina volilcev bi kandidate razvrstila takole

$$1.\ B, \quad 2.\ C, \quad 3.\ A,$$

tretja tretjina volilcev pa bi kandidate razvrstila takole

$$1.\ C, \quad 2.\ A, \quad 3.\ B,$$

potem bi dve tretjini volilcev dalo prednost kandidatu A v primerjavi s kandidatom B, dve tretjini kandidatu B v primerjavi s kandidatom C in dve tretjini prednost kandidatu C v primerjavi s kandidatom A. V tem primeru je predsednik lahko katerikoli od kandidatov in je odvisen od tega, katera dva kandidata sta se pomerila v prvem krogu.

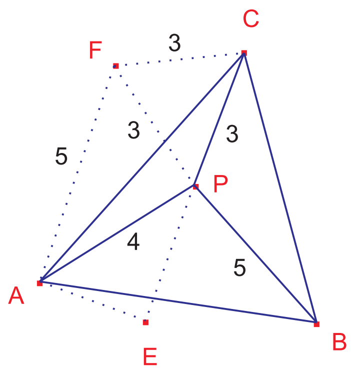
Rešitev 3.19. Naj bo $m = a^2 + b^2$ in $n = c^2 + d^2$, kjer so a, b, c in d naravna števila. Potem velja, da je

$$\begin{aligned} mn &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd - 2abcd = \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \end{aligned}$$

Rešitev 3.20. V trikotniku $\triangle ABC$ velja: $|PC| : |PA| : |PB| = 3 : 4 : 5$. Konstruirajmo enakostranični trokotnik $\triangle PCF$ tako, da ležita P in F na različnih bregovih stranice AC (glej sliko 4).

Narišimo še daljico AF in projekcijo E točke A na nosilko daljice CP. Potem velja $\measuredangle PCB = 60° - \measuredangle PCA = \measuredangle ACF$, torej sta trikotnika $\triangle PCB$ in $\triangle FCA$ skladna po izreku (s, k, s) in $|AF| = |BP| = 5$ enot. Ker so stranice trikotnika $\triangle APF$ dolge 3, 4 in 5 enot, je trikotnik $\triangle APF$ pravokoten. Zato je $\measuredangle APE = 180° - 60° - 90° = 30°$. Od tod pa sledi, da je $|AE| = 4 \cdot \sin 30° = 2$ in $|EP| = 4 \cdot \cos 30° = 2\sqrt{3}$ enot. In končno

$$|AC| = \sqrt{|AE|^2 + |EC|^2} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3} + 3\right)^2} \doteq 6,7664 \text{ enot.}$$



Slika 4: Iskanje dolžine stranice