PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **33** (2005/2006)
Številka 3
Strani 8–9

Aleš Mohorič :

ALI LAHKO UKANEMO RULETO?

Ključne besede: matematika, igre na srečo, ruleta, verjetnost, martingalska strategija.

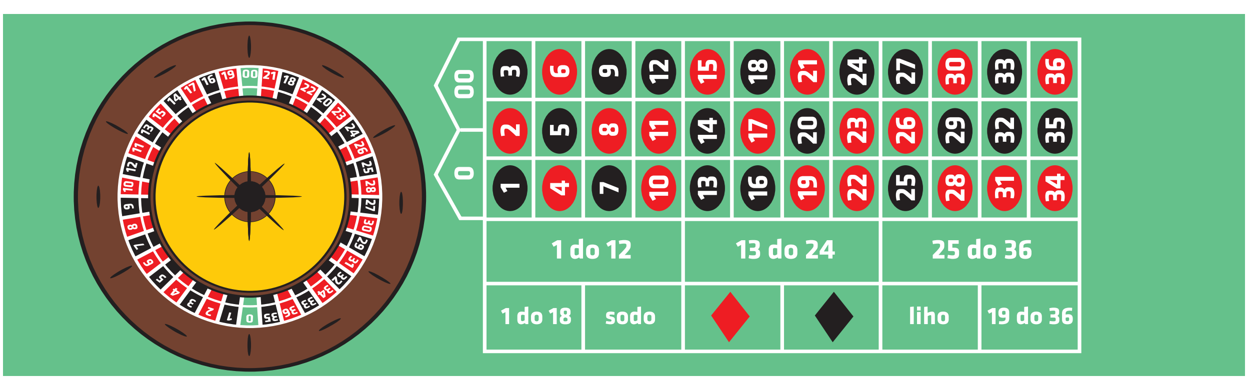
Elektronska verzija: http://www.presek.si/33/1625-Mohoric.pdf

Ali lahko ukanemo ruleto?

Aleš Mohorič

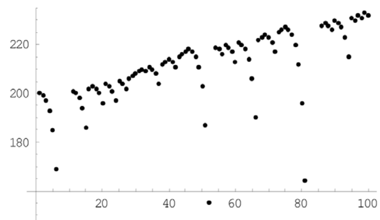
Ruleta je igra na srečo, ki izvira iz Francije in se je prvič pojavila v 17. ali zgodnjem 18. stoletju. Najbolj znan center, kjer igrajo to igro, je Monte Carlo, ki leži v kneževini Monako. Pri igri sunemo kroglico na vrteče se kolo, ki ima po obodu 37 ali 38 enakih predalov, v katere se kroglica lahko ujame (slika 1). Predali so izmenjaje rdeče in črne barve, označeni s številkami od 1 do 36 in ne nujno v pravem vrstnem redu. En od predalov je poseben, označen je z zeleno barvo in nosi številko 0 (predvsem v Ameriki dodajo še en predal z oznako 00). Pri igri stavimo določen znesek na določeno število, množico števil ali pa barvo predalčka, v katerem se bo kroglica ustavila. Igro dobimo, kadar se kroglica ustavi na enem od polj, ki jih naša stava pokrije. Koliko bomo dobili nazaj, je odvisno od zneska, ki ga stavimo, in načina stave.

Kadar stavimo na eno od števil, bomo v primeru, da se kroglica ustavi na tem številu, dobili vrnjen šestintridesetkratni znesek stave. Če stavimo na dve sosednji števili, tako da žeton položimo na črto med številoma, dobimo pol manj, če pa žeton položimo na vogal, stavimo na štiri števila naenkrat in dobimo za zmago štirikrat manjši znesek. Stavimo lahko tudi na množice števil: števila od 1 do 12, od 13 do 24, od 25 do 36 – pri teh stavah dobimo v primeru zmage povrnjeno trojno vsoto, za množice števil od 1 do 18, soda, liha in od 19 do 36 pa dobimo povrnjen dvojni znesek. Stavimo lahko tudi na to, da se bo kroglica ustavila v črnem ali v rdečem predalu. Tudi tu nam vrnejo podvojeno stavo. Če se kroglica ustavi na zelenem polju, dobi vedno našo stavo igralnica. Kolikšen znesek dobimo pri določeni stavi, izračunamo iz verjetnosti, s katero se določen dogodek zgodi. Denimo, da opazujemo številko ena in štejemo, kolikokrat kroglica obstane na tej številki. Število teh dogodkov N_1 bo naraščalo, čimvečkrat bomo zavrteli kolo rulete. Izkaže se, da kvocient števila N_1 in števila zavrtitev kolesa N teži h konstantni vrednosti, ko je N dovolj velik. Ta kvocient imenujemo verjetnost $P_1 = \frac{N_1}{N}$, da pri igri obstane kroglica v predalu z oznako 1. Na enak način lahko poiščemo verjetnost P_i za katerokoli število i. Če je ruleta poštena, so vse verjetnosti enake, in tako sledi $P_i = \frac{1}{38}$ (za ameriško ruleto z dvema zelenima poljema). To ne pomeni, da se bo kroglica ustavila na določeni številki enkrat v 38-ih poskusih, ampak da bo v veliki množici serij po 38-ih poskusih v povprečju po en tak rezultat na serijo – pri nekaterih serijah jih ne bo nič, pri nekaterih pa lahko tudi veliko. Verjetnost, da bo kroglica pri igri obstala na enem od mest iz večje množice, je enaka vsoti verjetnosti za mesta iz te množice. Na obodu kolesa je 18 rdečih polj in pri pošteni ruleti je verjetnost, da se kroglica ustavi na rdečem polju enaka $P_R = 18 \cdot \frac{1}{38} \approx 0{,}47$. To pomeni, da bi v povprečju v stotih igrah kroglica 47-krat obstala na rdečem polju. Če bi torej ves čas stavili po en tolar na rdečo, bi v povprečju na vsakih sto iger izgubili šest tolarjev. V primeru, da je kroglica pri igri obstala na rdeči, je verjetnost, da bo kroglica v naslednji igri obstala ponovno na rdeči, enaka kot prej, namreč 0,47. To pravilo velja, kadar so meti kroglice med seboj neodvisni (drugače bi denimo veljalo v primeru, ko bi po vsakem metu pokrili tisti predal, na katerem je kroglica obstala). $P_{2R} = P_R \cdot P_R = \frac{18}{38} \cdot \frac{18}{38} \approx 0{,}22$ je verjetnost, da bo kroglica v naslednjih dveh zaporednih igrah obstala na rdeči. Podobno velja za n ponovitev $P_{nR} = \left(\frac{18}{38}\right)^n$. Ta verjetnost je manjša od enega odstotka šele za n, ki je večji od 6. Vendar pa je ta verjetnost lahko poljubno majhna, če je n poljubno velik. In tu se skriva trik, s katerim bi lahko ukanili ruleto. Izkoristimo dogodek, katerega verjetnost je tako majhna, da se skoraj zagotovo ne bo zgodil. Denimo, da tolikokrat zapovrstjo stavimo na rdečo, da kroglica na koncu obstane na rdeči. Razum nam narekuje, da se bo to slej ko prej zgodilo. Razmisliti moramo samo še, kako staviti,



Slika 1.

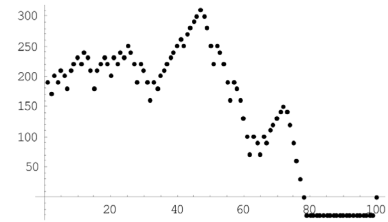
```
In[46]:= vzepu = Table[0, {100}]; stava = 1;
    For[t = 1, t < 100, If[Random[] < 0.47, dobicek = stava;
        stava = 1, dobicek = -stava; stava = 2 * stava];
      vzepu[[t+1]] = vzepu[[t]] + dobicek ; t++];
    ListPlot[vzepu + 200, PlotStyle → PointSize[0.015]]
```



Out[48]= - Graphics -

Slika 2.

```
In[210]:= vzepu = Table[0, {100}]; stava = 10;
    trenutno = 200; maksimalnastava = 30;
    For[t = 1, t < 100, If[Random[] < 0.47, dobicek = stava;
        stava = 10, dobicek = -stava;
        stava = Min[2 * stava, trenutno, maksimalnastava]];
        trenutno = trenutno + dobicek; vzepu[[t]] = trenutno ;
        If[trenutno < 0, stava = 0]; t++];
    ListPlot[vzepu, PlotStyle → PointSize[0.015]]
```



Out[212]= - Graphics -

Slika 3.

da bomo imeli dobiček. Če prvo stavo dobimo, potem naslednjič stavimo enako, če pa jo zgubimo, naslednjič podvojimo stavo. Če bomo v drugem poskusu zmagali, bomo tako pokrili izgubo prve stave in pridobili znesek ene stave. Če zgubimo tudi vdrugo, moramo v tretjem poskusu staviti toliko, da bomo pokrili izgube od prej (dve izgubljeni stavi – trojni znesek prve stave), trenutno stavo in še zaslužili; torej moramo staviti štirikratno vsoto prve stave. Če zgubljamo še naprej, moramo pri vsaki naslednji stavi vložek prejšnje stave podvojiti. Na ta način lahko povečujemo stavo, dokler se nam končno ne nasmehne sreča, ali pa nam prej ne zmanjka denarja. Kadar ruleta ni poštena, se kroglica ustavi na določenih številih pogosteje kot na drugih. To lahko dosežemo z manipulacijo kroglice ali kolesa. Tudi s skrbno analizo meta kroglice in vrtenja kolesa lahko napovemo izid z večjo verjetnostjo kot v primeru, ko igramo na slepo. Seveda je potem pametneje staviti na verjetnejši izid. Strategija igranja je v tem primeru enaka, le zaslužek se hitreje kopiči. In ravno ko pomislimo, da smo odkrili lahek način služenja, je čas, da se spustimo na realna tla. Ves blišč igralnic ni poceni, zato lahko mirno sklepamo, da igralnice v povprečju poberejo več denarja, kot pa ga izplačajo. Pravzaprav je sistem podvojevanja (bolj znan kot martingalski sistem) eden najstarejših sistemov igranja iger na srečo in ga dobro poznajo tudi lastniki igralnic, ki zanj poznajo preprost in učinkovit protiukrep – najvišja stava je namreč omejena. Že z najmanjšim začetnim vložkom bomo hitro prišli do meje in tam se sistem poruši. Denimo, da je najmanjši vložek en žeton, največji pa 200 žetonov. V tem primeru bomo do zgornje meje prišli v devetem zaporednem poskusu. Čeprav je verjetnost za devet zaporednih neuspehov sicer majhna ($(20/38)^9 = 0{,}31$), pa en tak dogodek na večer ni neverjeten. Pri tem lahko zapravimo ves dobiček, ki ga pri takem načinu igranja le počasi nabiramo. Vsekakor je služba boljši način služenja denarja kot pa igranje na srečo. Poleg tega uporabljajo v zadnjem času vse bolj popularne internetne igralnice razne trike in prevare, da namamijo čimveč lahkovernežev. Na eni od interetnih igralnic sem preizkušal sistem in seveda mastno zaslužil. Po krajši analizi sem ugotovil, da sem v dvesto stavah na rdečo 133 krat zmagal, 67 krat pa izgubil. Verjetnost, da v dvesto poskusih vsaj 133 krat pade rdeča, je 1/3788515. Seveda sem igral v demo načinu, kjer vlagamo virtualni denar in program očitno goljufa. Če bi igral za pravi denar, sem prepričan, da ne bi imel take sreče.

V matematičnem programu Mathematica sem pripravil preprosto simulacijo enega popoldneva za ruleto. Algoritem in rezultat sta prikazana na sliki 2. Na vodoravno os je nanešena zaporedna številka igre, na navpično pa število žetonov, ki jih imam v žepu. V algoritmu privzamem, da imam v začetku v žepu 200 žetonov in da vedno stavim najmanjši možni znesek enega žetona. Kadar stavo izgubim, podvojim zadnji vložek, dokler stave ne dobim. Slika torej prikazuje martingalsko strategijo. V simulaciji ne upoštevam omejitve največjega možnega vložka. Kot vidimo, znesek v žepu zelo počasi narašča, če zamižimo na eno oko pri dvainpetdeseti igri, kjer bi se moral zadolžiti.

Če tvegamo malo več in stavimo po deset žetonov, stavo omejimo navzgor in ne pustimo zadolževanja (realna slika), se pravljica odvija povsem drugače, kot vidimo na sliki 3. Primeri se med seboj razlikujejo, kot pri vsakem slučajnem procesu, ampak takoj lahko opazimo, da dobiček odhaja igralnici. V konkretnem primeru smo v 78. igri ostali brez denarja.

Nauk. Martingalska strategija deluje, v kolikor imamo na razpolago neomejen kapital in stave niso omejene. Vendar tudi v tem primeru igre ne moremo prekiniti, kadar hočemo, ampak moramo počakati na ugoden trenutek. Tudi matematično je mogoče dokazati, da zmagovite strategije ni. Kadar se že odločite poskusiti svojo srečo v igralnici, to počnite za zabavo in za vnaprej določen znesek, ki ga lahko kar odpišete. Kakršenkoli drugačen odnos do igre vas lahko kaj kmalu zapelje v odvisnost in hude težave. Izbrskal sem podatek, da je bil povprečni odvisnik od iger na srečo v državi New Jersey v ZDA leta 1990 dolžan kar 40 000 $. Za ta denar si raje kupite stanovanje.