

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 31 (2003/2004)

tevilka 6

Strani 326-332

Jože Rakovec:

ZAKAJ SE V SKODELICI ZBIRAJO NA SREDI OB DNU ČAJA ZRNA SLADKORJA

Ključne besede: fizika, pospeki pri kroženju, vremenski pojavi, ciklon, anticiklon, Coriolisov pospešek.

Elektronska verzija:

© 2004 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založnik

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

ZAKAJ SE V SKODELICI ČAJA ZRNA SLADKORJA ZBIRAJO NA SREDI OB DNU

Ko čaj sladkamo in ga pomešamo, se neraztopljeni zrnca sladkorja ter delci čajnih lističev zberejo ob dnu na sredi skodelice. Na dno potonejo seveda zato, ker so težji od tekočine. Toda zakaj jih vrtenje čaja ne potisne ob obod skodelice, kot bi pričakovali za relativno težje delce? Podobno tudi vrtinci zraka, ki včasih nastajajo za vogali hiš, zbirajo smeti v svojem središču. Zakaj teh smeti vrtenje ne razmeče naokrog, ko pa so vendar težje od zraka? To je "prastaro" vprašanje. Menda naj bi (tako pravi <http://www.clarkson.edu/~space/teacup.html>) že Empedokles iz Akragasa (po latinsko: Agrigenta) na Siciliji v 5. stol. pr. Kr. uporabil prisposodbo s čajem, ko je razlagal, da vrtenje razdvaja snovi različnih lastnosti. Danes razdvajanje z vrtenjem tudi praktično uporabljamo v centrifugah. Kjer se v industriji praši, npr. v lesnih tovarnah, imajo pokončne, ponekod tudi več metrov visoke valjaste čistilne naprave s stožčastim podaljškom na dnu. Vanje vpihavaajo zrak z žaganjem in lesnim prahom, ga močno zavrtinčijo in med vrtenjem se nabirata žaganje in lesni prah ob stenah valja ter se usedata navzdol skozi stožčasti podaljšek, očiščeni zrak pa izstopa iz čistilne naprave na sredini ob vrhu. In spet se vprašamo, zakaj tudi tu vrtenje poriva žaganje in prah proti stenam, v čaju pa se na dnu zrnca sladkorja in listki čaja zbirajo na sredi in ne ob stenah.

Spremembe hitrosti in pospeški pri kroženju

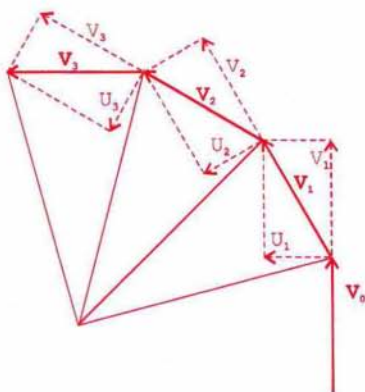
Pri enakomernem kroženju je velikost hitrosti ves čas enaka, spreminja se le smer. Ves čas enaka pa je tudi sprememba smeri, ves čas je tudi pravokotna, t.j. normalna na trenutno hitrost \mathbf{V} ; povzročajo jo *normalni pospešek* a_n . Velikost tega pospeška je ves čas enaka, njegova smer pa je proti središču kroženja: $\mathbf{a}_n = -\Omega^2 \mathbf{r}$. Negativni znak minus pove, da pospešek ne deluje navzven, v smeri naraščajočega polmera r , temveč v nasprotno smer, vedno proti središču kroženja. *Krožna hitrost* $\Omega = \Delta\varphi/\Delta t = 2\pi/T = |\mathbf{V}|/r$ je pri enakomernem kroženju konstantna.

V mislih razstavimo kroženje na posamezne premike v kratkih časovnih intervalih Δt , v katerih se hitrost vsakič znova spremeni. Smer hitrosti \mathbf{V} je *smer tangente* na krog. *Pravokotno v levo* od nje naj kaže *normala* na trenutno smer. Ob začetkih takih intervalov Δt seveda hitrost nima komponente "v levo, vstran". Ob koncih teh intervalov, čez čas Δt , pa se pojavljajo vsakič enako velike normalne komponente hitrosti $U = a_n \Delta t$. Kadar je normalni pospešek pozitiven, so pozitivne tudi

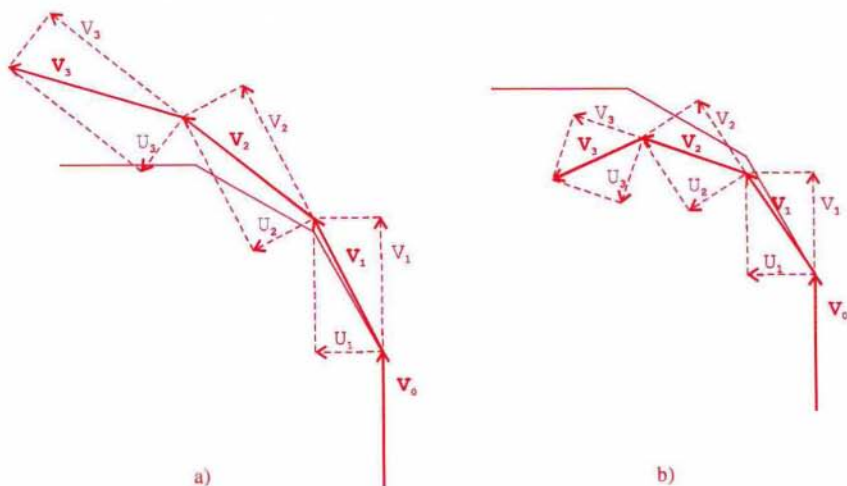
$U_1, U_2, U_3 \dots$ in njihove smeri so, glede na prvotno hitrost, v levo (ker smo privzeli za smer normale "pravokotno v levo glede na dosedanjo smer"). Pri enakomernem kroženju so tudi velikosti tangencialnih komponent $V_1, V_2, V_3 \dots$ vzdolž dosedanje smeri ves čas enake (slika 1).

Kaj pa tedaj, ko se spreminja oboje, smer gibanja, pa tudi velikost hitrosti? Da bo naša obravnava preprosta, naj bo normalni pospešek, tako kot pri enakomernem kroženju, konstanten in pozitiven. Zato so tudi spremembe smeri "v levo od prejšnje smeri" vsakič enake $U = a_n \Delta t$. Najprej obravnavajmo primer, ko se velikost hitrosti V povečuje, npr.

v vsakem časovnem koraku za deset odstotkov: $V_1 = 1,10V_0, V_2 = 1,10V_1 = 1,21V_0, V_3 = 1,10V_2 = 1,33V_0$, itn. Slika 2a nas prepriča, da se tedaj pot glede na prejšnji primer enakomernega kroženja spiralasto oddaljuje *navzven*. Kadar se velikost hitrosti zmanjšuje (npr. spet za deset odstotkov v vsakem časovnem intervalu – slika 2b), pa imamo gibanje spiralasto *navznoter*.



Slika 1.



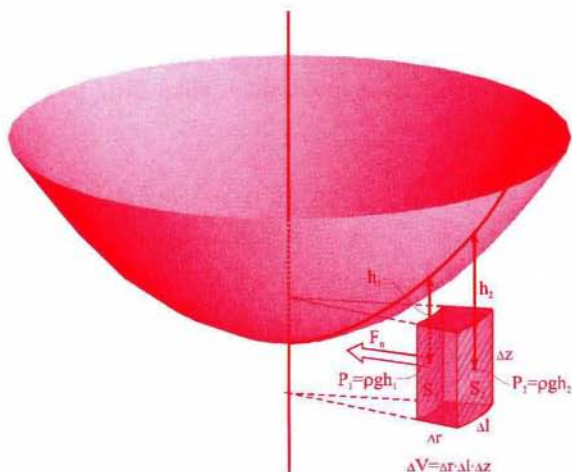
Slika 2.

Sila, zaradi katere čaj kroži v skodelici

Ko čaj pomešamo, ga zavrtimo v kroženje. Pri tem se posameznim delom čaja smer hitrosti ves čas spreminja; gibanje je pospešeno z normalnim pospeškom a_n . Kot nas je naučil 2. Newtonov zakon, so pospeški (t.j. spremembe hitrosti v času) posledica delovanja sil. Zato lahko spremembo hitrosti prečno na prvotno smer, torej kroženje, povzroči samo sila F_n , ki deluje v prečni smeri. Katera je ta sila?

Za začetek povejmo, da tlak v tekočini z globino narašča. To dobro občutimo npr. ob potapljanju: v čim večjo globino h se potopimo, tem večja je masa vode nad nami. Če je nad površino A volumen vode $V = Ah$, je masa te vode $m = \rho V = \rho Ah$ in njena teža $F_t = mg$ je $F_t = \rho Ahg$ (ρ je gostota vode). Posledica je torej tlak, $p = F_t/A = mg/A = \rho hg$.

Sedaj se lotimo obravnave gibanja dela čaja v volumnu V , ki ga omejujejo robovi Δr , Δz in Δl : $V = \Delta r \Delta z \Delta l = \Delta r S$ ($S = \Delta z \Delta l$). V tem volumnu je masa čaja $m = \rho V = \rho \Delta r S$ (ρ je gostota čaja, skoraj enaka gostoti vode). Ko čaj pomešamo, se prej ravna gladina čaja usloči; ob robovih se dvigne, na sredi pa zniža (slika 3).



Slika 3.

Zato je na sredi v skodelici, kjer je čaja manj, tlak p_1 nižji, na večji oddaljenosti od središča, kjer je čaja več, pa je na isti globini tlak p_2 višji. Tlak p_1 ob notranji ploskvi S_1 je torej nižji, tlak p_2 ob zunanji ploskvi S_2 pa višji. To je vzrok za silo $F_n = p_1 S_1 - p_2 S_2$. Ker sta S_1 in S_2 skoraj

enaki, $S_1 \approx S_2 = S$, je zato sila $F_n \approx S(p_1 - p_2) = -\rho g \Delta h S$. Negativni znak pomeni, da kaže sila v nasprotno smer kot naraščajoča oddaljenost r od središča skodelice; imamo torej silo proti središču skodelice. Sila na masno enoto je

$$F_n/m = (-\rho g \Delta h S)/(\rho \Delta r S) = -g \Delta h / \Delta r .$$

Posledica te sile je (po 2. Newtonovem zakonu $a = F/m$) pospešek a_n "navznoter", posprek na smer obodne hitrosti:

$$a_n = \Delta U / \Delta t = F/m = -g \Delta h / \Delta r .$$

Ali lahko določimo tudi obliko gladine čaja v skodelici? Ker velja enakost med pospeškom $a_n - r\Omega^2$ in specifično silo $F_n/m = -g \Delta h / \Delta r$, ki povzroča ta pospešek

$$-r\Omega^2 = -g \Delta h / \Delta r ,$$

lahko od tod določimo strmino $\Delta h / \Delta r$ gladine čaja:

$$\Delta h / \Delta r = \frac{\Omega^2}{g} r .$$

Čim dlje je od središča skodelice (večji r), tem bolj strma je gladina. Krivulja, katere strmina linearno narašča v odvisnosti od oddaljenosti od izhodišča, je parabola:

$$h(r) = h_0 + \frac{\Omega^2}{2g} r^2 .$$

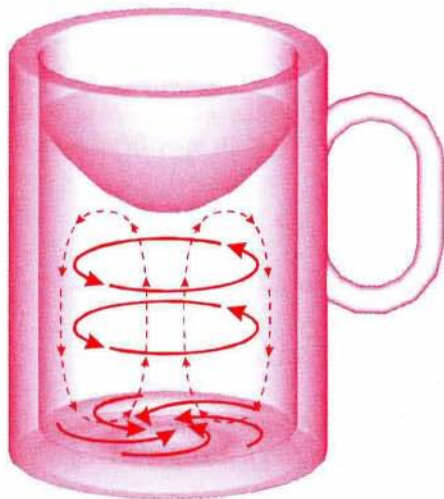
Oblika gladine čaja v skodelici je torej parabolična.

Zakaj se sladkor zbira na sredini

Če krožnega gibanja čaja v skodelici nič ne zavira ali pospešuje, deli čaja krožijo enakomerno po krožnicah. To velja povsod v skodelici, razen ob njenih stenah.

Ob dnu skodelice pa gibanje zavira trenje. (Trenje se sicer pojavlja tudi ob stranskih stenah skodelice, toda to za našo obravnavo ni zelo pomembno.) Trenje zmanjšuje hitrost, to pa pomeni, da se bo (v skladu s sliko 2b) čaj pri dnu gibal spiralasto proti sredini skodelice. S tem smo že pojasnili, zakaj se zrnca sladkorja in lističi čaja zbirajo ob dnu na sredini: ko zaradi večje teže potonejo k dnu posode, jih v plasti trenja ob dnu spiralast tok nosi proti sredini.

Kam pa gre tekočina, ki se ob dnu steka proti sredini? Seveda mora nekam odtekat; v sredini se čaj dviga. Trenje ob dnu torej povzroči, da se poleg horizontalnega kroženja naokrog po skodelici pojavi tudi dviganje na sredini navzgor, in seveda ob robovih skodelice potem spuščanje navzdol. To sekundarno kroženje je precej počasnejše od osnovnega horizontalnega kroženja, je tako rahlo, da ne more odnesti navzgor težjih zrnč sladkorja in lističev čaja, ta ostanejo na sredi ob dnu (slika 4).



Slika 4.

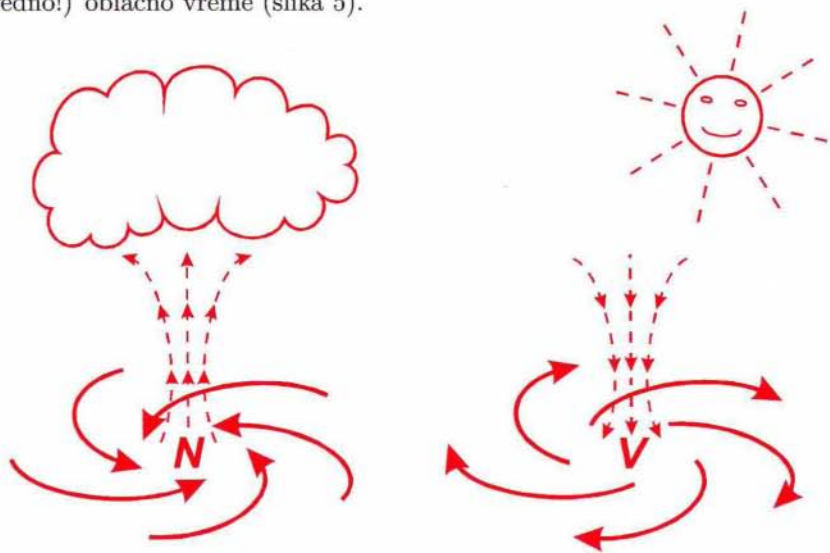
In kaj ima čaj opraviti z vremenom

Krožna gibanja so marsikje, ne le v skodelici čaja. V ozračju imamo krožne vrtince zraka; okrog velikih območij z veliko nakopičenega zraka, torej v *anticiklonih* z visokim zračnim tlakom, zrak kroži (na severni polobli) v smeri kazalcev na uri. Okrog območij, kjer je zraka manj in je zato zračni tlak nizek, torej v *ciklonih*, pa (na severni polobli) v smeri, nasprotni gibanju kazalcev na uri. (Na južni polobli sta smeri kroženja ravno obratni.) Ti vrtinci so veliki, imajo premer nekaj tisoč kilometrov.

Območja nizkega zračnega tlaka (cikloni) spominjajo na vrteči se čaj v skodelici; kot je v skodelici na sredi manj čaja in je zato tam tlak nižji, je v sredi ciklonov manj zraka in tam je zračni tlak nižji. Zato tja pospešuje sila zaradi tlačnih razlik.

Zrak v višinah ne občuti kaj dosti trenja. Pri tleh pa na gibanje zraka kar precej vpliva trenje ob tla. Ta plast, v kateri je trenje pomembno, je razmeroma debela, nad ravno pokrajino sega nekako do višine kakih 1000 do 2000 km nad tlemi. V tej plasti se zrak spiralasto steka proti središču ciklona. Na sredi ciklonov se raje dviga, kot da bi se stisnil, tam imamo torej zaradi trenja pri tleh rahlo dviganje zraka, s hitrostjo med 0.01 in 0.1 m/s. V anticiklonih pa imamo podobno močno spuščanje zraka. In zakaj je to pomembno?

Zrak, ki se spušča iz višin, prihaja navzdol med zračne mase, v katerih je tlak višji. Zato ga okolica toliko stisne, da se tlaki izravnajo. Pri stiskanju pa se zrak segreva; saj veste, kadar polnite zračnico svojega kolesa, se zračna tlačilka segreje zaradi stiskanja zraka (kompresorji za stisnjen zrak imajo rebraste hladilne lamele, da se hladijo, ko se ob stiskanju zrak v njih segreva). Ob dviganju pa le-ta pride v redkejšo okolico, zato se razpne. Ob dviganju in razpenjanju se torej zrak ohlaja. V ciklonih, kjer se zrak dviga, se ob tem ohlaja, v anticiklonih pa se ob spuščanju segreva. Tudi če bi bili v anticiklonih v višinah oblaki, bi ob spuščanju in hkratnem segrevanju zraka kapljice v njem ob potovanju navzdol izhlapele. Zato je v anticiklonih največkrat (a ne vedno!) jasno vreme. V ciklonih pa se zrak dviga, ob tem se ohlaja in morebitna ohladitev pod rosišče pomeni nastanek kapljic – nastajajo oblaki. Zato je v ciklonih ponavadi (a ne vedno!) oblačno vreme (slika 5).



Slika 5.

Na tem mestu je potrebno opozoriti še na eno pomembno stvar: čim močnejše je dviganje, tem močnejše je ohlajanje, tem močnejša je tvorba oblakov. Ker trenje pri tleh povzroča le dviganje s hitrostjo okrog 0.01 do 0.1 m/s, je to le manj pomemben vzrok za oblačnost. Zrak se pogosto dviga precej močnejše; zaradi dviganja ob pobočjih obsežnih gorskih masivov ali pa če se toplejši lažji zrak nariva nad gmoto težjega hladnega zraka, so vertikalne hitrosti lahko tudi 1 ali morda 10 m/s. Tam je oblačnost še posebej gosta in padavine močne. V nevihtnih oblakih pa neuravnoteženi vzgon včasih požene zrak navzgor tudi s hitrostjo nekaj deset metrov na sekundo. Takrat pa res dežuje, kot bi "padale ošpičene prekle".

Drugače kot pri čaju je za velike vremenske tvorbe – ciklone in anticiklone – pomemben tudi vpliv vrtenja Zemlje. Ne kroži samo zrak v ozračju, temveč se vrtil tudi Zemlja sama. Iz tega sledi pospešek, *Coriolisov pospešek*, katerega velikost je premo sorazmerna hitrosti in ki na severni polobli kaže v desno od smeri hitrosti, na južni pa v levo. Zato se poruši simetrija glede smeri vrtenja. Čaj bi lahko zavrteli v eno ali drugo stran, zrak v ciklonih pa na severni polobli vedno kroži v smeri, nasprotni gibanju kazalcev na uri (v anticiklonih pa v smeri kazalcev na uri). V ciklonih ta pospešek na severni polobli zaradi tlačnih razlik deluje nasprotni sili in njene učinke torej nekoliko zmanjšuje. Zrak kroži nekoliko počasneje, kot da bi bila strmina $\Delta h/\Delta r$ nekoliko manjša, kot je v resnici (v anticiklonih pa obratno, nekoliko hitreje, kot da bi bila strmina nekoliko večja). Ob upoštevanju take "navidezno manjše" strmine pa imamo torej skoraj popolno podobnost med ciklonom in čajem.

Jože Rakovec