PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **30** (2002/2003)
Številka 5
Strani 267–272

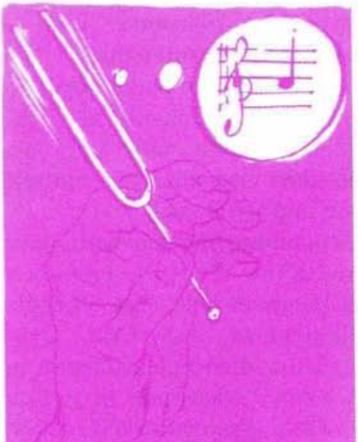
Marija Vencelj:

GLASBA IN MATEMATIKA – 1. del, tonski sistemi

Ključne besede: matematika, nihanje, zvok, ton, glasba, tonska lestvica.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/30/1524-Vencelj.pdf

GLASBA IN MATEMATIKA – 1. del
Tonski sistemi



Pred dobrimi štirinajstimi leti sta v Preseku že izšla dva prispevka o izgradnji glasbenih lestvic (Presek XVI, št. 1, str. 12 in št. 2, str. 66). Na številne pobude, naj članka ponatisnemo, sta nastala dva nova zapisa: prispevek o tonskih sistemih in članek o kitari, ki bo izšel v naslednji številki Preseka. Vseeno pa tiste mlade bralce, ki jih tema zanima, vabim, da si ogledajo tudi oba stara članka. Tam boste našli razložen marsikateri osnovni pojem, ki ga bomo tu kar uporabili. Ustrezna Preseka gotovo hrani vaša šolska knjižnica.

— — —

Glasba sega v večino področij človekovega udejstvovanja, je del znanosti, umetnosti, kulture, zgodovine, ... Dejansko je to ena najstarejših ved. Tako je npr., bolj kot karkoli drugega, potrjevala Pitagorejce v prepričanju, da je kozmos harmonični prostor, ki mu vladajo števila. Tudi mi bomo nanjo pogledali predvsem z matematičnega vidika.

— — —

Vsako nihajoče telo je izvor prostorskega valovanja, ki se širi na vse strani in v vseh snoveh. Človeško uho je sposobno zaznati valovanje zraka v širokem slušnem območju in ga pretvoriti v slušni dražljaj. Prostorsko valovanje v tem frekvenčnem območju imenujemo zvok. Zvočne pojave lahko razdelimo na tone, zvene in šume. Vsi zvoki lahko postanejo glasbeno gradivo, vendar so njeni najosnovnejši zidaki glasbeni toni. *Ton* (čisti ali sinusni ton) je s fizikalnega stališča zvok z natančno določeno frekvenco. Ustvarimo ga lahko le umetno s tonskimi generatorji. Glasbila oddajajo *glasbene tone*, ki so posebna kombinacija čistih tonov. Poleg osnovnega tona s frekvenco f nastopajo v njih še *alikvotni toni*, to so toni, katerih frekvence so večkratniki frekvence osnovnega tona $2f$, $3f$, $4f$ itd. Ton z dvojno frekvenco, pa tudi interval med osnovnim tonom in tonom z dvojno frekvenco, imenujemo *oktava*, interval med tonoma s frekvenco f in $3f$ je *kvinta* v oktavi više, $4f$ je dvojna oktava itd. *Višina glasbenega* *tona* je določena s frekvenco osnovnega tona. Pojav alikvotnih tonov je pomemben faktor, ki odloča o zvočni barvi, to je razliki v zvoku enako visokega tona, ki ga izvajajo različni instrumenti ali glasovi. Teoretično bi sicer lahko zveneli vsi alikvotni toni dane osnovne frekvence. Toda to bi zagotovo povzročilo neznosno disonanco. Dejansko pa intenziteta višjih alikvotov naglo in pri različnih instrumentih različno hitro pada. Res. Na nekaterih instrumentih je težko zaznati več kot tretji alikvot (npr. pri kitari), violine in oboe pa imajo nasprotno močne visoke alikvotne tone, ki jim dajejo svetel ton. Flavte in frule imajo šibke višje alikvote. Nadalje ima klarinet močne lihe alikvote, zaradi česar ima votel zvok.

Kako neizmerno je zvočno gradivo, ki ga ponujajo glasbeni toni, pove podatek, da sega naše slušno območje od 16 Hz (ali s^{-1}, to je nihajev v sekundi) do 20 000 Hz. Pri tem smo v občutljivejšem delu tega območja sposobni med seboj ločiti tona, ki se razlikujeta za vsega 1 Hz. Zato se je že davno pokazala potreba uvesti v glasbo določeno enotnost in red, med drugim izbrati omejeno množico tonov, s katerimi bi gradili melodije. Nastali so razni *tonski sistemi* s svojimi *glasbenimi lestvicami*, ki predstavljajo izbor možnih tonov v okviru ene oktave.

— — —

Poznamo različne tonske sestave, ki so bili v različnih zgodovinskih obdobjih in različnih kulturah različno pomembni. Tako v religiozni kot zabavni **indijski glasbi** je oktava neenakorazmerno razdeljena na 22 intervalov - šrutov, lestvice pa so pet ali sedemtonske z dodatno četrtonsko delitvijo.

V **kitajski glasbi** je izrazita pentatonika brez poltonov (glasba na petih tonih) obvladovala melodije tako nekoč kot danes. Sam pojav pentatonike in vztrajanje pri njej sta odraz kitajskega odnosa do sveta. Kitajska glasba je zadržana, zgoščena in hladna, kar v znatni meri izhaja iz pentatonike; izražati hoče splošna čustva, ne individualnih. Njeno sistematiko je utemeljil že filozof Fohi pred 5000 leti. Tako kot Pitagorejci je bil tudi on prepričan, da je glasba odmev harmonije vesolja in zato, tako kot vesolje, temelji na sistemu števil. Zanj je bilo najpopolnejše število pet, ki se ujema s številom t.i. starih planetov (Merkur, Venera, Mars, Jupiter, Saturn) kakor tudi s številom glavnih elementov, iz katerih je sestavljen svet.

Zahodna glasba zadnjih treh stoletij uporablja tone kromatične tonske lestvice, ki ima oktavo razdeljeno na 12 *poltonskih intervalov*. Če začnemo s C, so njeni toni poimenovani takole:

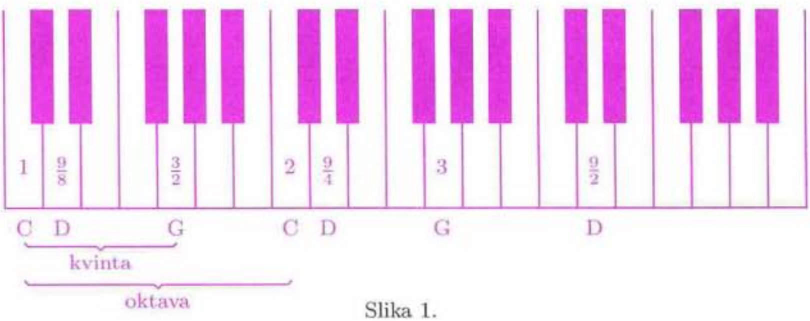
C, Cis(Des), D, Dis(Es), E, F, Fis(Ges), G, Gis(As), A, Ais(Hes), H

Nato se ponovi C, toda oktavo više, in z njim vsa lestvica. To se nadaljuje navzgor in navzdol vse do mej slušnega območja. Srednji C, to je c^1, osnovni ton prve oktave, ima frekvenco 262 Hz. Frekvence zaporednih tonov tvorijo geometrijsko zaporedje, kar pomeni, da je *razmerje njihovih frekvenc konstantno*. To je zelo pomembna lastnost, ki je dejansko nujna zaradi nelinearnega odziva človeškega bobniča na višino zvoka. Če zanemarimo ritem, sliši naše uho isto melodijo ne glede na višino, če je razmerje frekvenc tonov, ki jo sestavljajo, vsakokrat isto. To pa pomeni, da lahko melodije prenašamo više ali niže le, če tonski sestav sestoji iz zaporednih tonov, katerih frekvence tvorijo geometrijsko zaporedje.

Na klavirju pripadajo bele tipke tonom

$$C, D, E, F, G, A, H.$$

Zapored zaigrane dajo melodijo C-durove lestvice (poznamo 12 durovih in 12 molovih lestvic). Oktavnemu intervalu ustreza torej vrzel osmih belih tipk. Črne tipke dajejo zvišane (ali znižane) tone (slika 1).



Slika 1.

Današnji sistem se je razvil v dolgi časovni periodi in je kompromis med protislovnimi zahtevami, ki jim lahko sledimo vse do Pitagorejcev v antični Grčiji. Zaradi enostavnosti bomo pri razlagi razvoja uporabljali moderne oznake, čeprav s tem tvegamo očitek, da smo pomešali rahlo različne pojme.

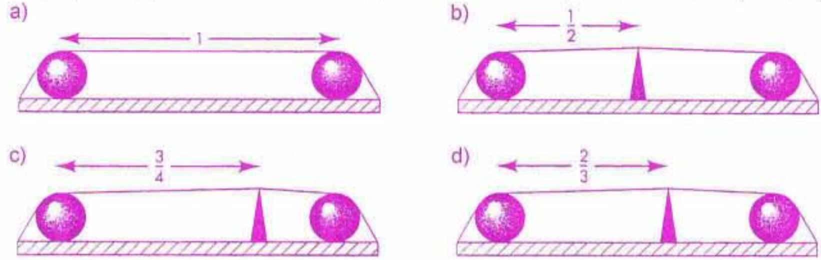
Legenda pripoveduje, da je Pitagora poslušal kladiva štirih kovačev, katerih melodija se mu je zdela zelo prijetna. Ko je kladiva stehtal, so tehtala 12, 9, 8 in 6 utežnih enot. Iz teh tež je Pitagora dobil razmerja

$$12 : 6 = 2 : 1, \quad 12 : 8 = 3 : 2, \quad 12 : 9 = 4 : 3 \quad \text{in} \quad 9 : 8.$$

Od tod je prišel na idejo, da posebej sozvočno zvene toni, katerih *frekvence* so v navedenih razmerjih.

Težko je reči, kaj se je zares zgodilo pred 2600 leti. Vsekakor je imel starodavni učenjak z idejo precej sreče. Vidimo namreč, da gre v prvem primeru za oktavni interval med tonoma, naslednja razmerja pa pomenijo današnjo čisto kvinto, čisto kvarto in cel ton, to je interval iz dveh poltonov. Mogoče pa je Pitagora tedaj sedel v isti banji kot Arhimed 400 let kasneje.

Klavdij Ptolemej, ki je živel okrog leta 150 našega štetja, je predvsem znan po svojih astronomskih in geografskih delih, napisal pa je tudi knjigo o teoriji glasbe *Harmonics*. V njej poroča o zgornji Pitagorovi trditvi, da lahko sozvočne intervale med glasbenimi toni predstavimo s kvocienti celih števil. To je prikazal eksperimentalno, pri čemer je uporabil precej nerodno pripravo, poznano kot kánon, neke vrste enostrunsko kitaro (slika 2).



Slika 2.

Če premikamo premični most, prečko, vzdolž kánona, je videti, da dobimo pri določenih legah tone, ki skupaj s tonom, s katerim zveni vsa struna, zvene bolj harmonično od drugih. Najosnovnejši tak interval je oktava. Na kánonu je to interval med tonom, ki ga dobimo pri igranju na celi struni (slika 2a), in tonom, zaigranim na (natančno) polovični struni (slika 2b). Torej je razmerje med dolžino strune, ki odda dani ton, in dolžino strune, ki odda njegovo oktavo, enako $\frac{2}{1}$. To velja neodvisno od višine originalnega tona. Druga celoštevilska razmerja dolžin strun dajejo prav tako lepo zveneče (harmonične) intervale. Najpomembnejša intervala sta kvarta z razmerjem $\frac{4}{3}$ (slika 2c) in kvinta z razmerjem $\frac{3}{2}$ (slika 2d). Če začnemo z osnovnim tonom C, je drugi ton pri kvarti F, pri kvinti G in pri oktavi naslednji višji C. V C-durovi lestvici C, D, E, F, G, A, H, C so to četrti, peti in osmi ton. Od tod slede njihova latinska imena.

Druge intervale dobimo iz teh zidakov.

Domnevajo, da so Pitagorejci, da bi oblikovali harmonično tonsko lestvico, začeli z osnovnim tonom in napredovali navzgor s kvintami. Na ta način dobimo tone, ki jih zaigramo na strunah, katerih dolžine so z osnovno dolžino v razmerjih

$$1,\ \frac{3}{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^2,\ \left(\frac{3}{2}\right)^3,\ \left(\frac{3}{2}\right)^4,\ \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

ali

$$1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}.$$

Večina teh tonov leži zunaj ene oktave, saj je večina razmerij večja kot $\frac{2}{1}$. Toda s teh tonov se lahko spuščamo po oktavnih intervalih (tako, da razmerja delimo z 2), dokler ne dobimo rezultatov med $\frac{1}{1}$ in $\frac{2}{1}$. Če dobljena razmerja uredimo po velikosti, dobimo

$$1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}.$$

Če za osnovni ton izberemo C, zaporedje približno ustreza tonom C, D, E, G, A, H.

Oznake namigujejo, da nekaj manjka. Tudi slišati je, da je vrzel med $\frac{81}{64}$ in $\frac{3}{2}$ širša kot ostale. Vrzel lahko spodobno zamašimo tako, da dodamo kvarto, razmerje $\frac{4}{3}$, oziroma ton F. Pravzaprav bi kvarto lahko vgradili že na samem začetku, če bi se od osnovnega tona spustili za kvinto in se nato dvignili za oktavo, saj je

$$2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Zaporedje

$$1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}, 2, \tag{1}$$

ki ga dobimo na ta način (dodali smo še oktavo), ustreza približno tonom, ki jih dobimo z belimi tipkami na klavirju. Kaj pa črne tipke? Kar se same barve tipk tiče, bi najbrž glasba lahko shajala brez njih. Zakaj dobljeno zaporedje tonov ne zadošča? Če iz zaporedja (1) izračunamo razmerja frekvenc zaporednih tonov, dobimo

$$\frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{256}{243}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{256}{243}.$$

Vidimo, da imamo natanko dve razmerji, večje, $\frac{9}{8}$, nastopa petkrat, manjše, $\frac{256}{243}$, pa dvakrat. Ker je

$$\frac{9}{8} = 1.125 \quad \text{in} \quad (\frac{256}{243})^2 \approx 1.11,$$

lahko vzamemo, da je $\frac{9}{8} \approx (\frac{256}{243})^2$. Dva manjša intervala sta torej velika približno za en večji interval. To pomeni, da so v skali še vedno vrzeli. Vsak večji interval (cel ton) moramo razdeliti na dva manjša, od katerih bo vsak tako blizu manjšemu (poltonu), kot je le možno. Torej moramo dodati še pet tonov, ki jih bomo na klavirju zaigrali s črnimi tipkami.

Obstaja več načinov, kako se to naredi. Tako imenovana kromatična lestvica začne z ulomki $(\frac{3}{2})^n$ za $n = 0, 1, 2, \ldots, 10, 11$. Dobljene vrednosti nato reducira na isto oktavo, tako da jih ponavljaje se deli z dve in jih potem še uredi po velikosti (sistem: po kvintah navzgor, po oktavah navzdol, slika 1).

Rezultat prikazuje naslednja tabela za C-durovo lestvico, v kateri navajamo vrednosti razmerij harmoničnih intervalov in vrednosti, dobljene na opisani način.

ton	C	D	E	F	G	A	H	C
harmonični interval	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
kromatični interval	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{177147}{131072}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{531441}{262144}$

Vidimo, da se pri nekaterih tonih ulomki ne ujemajo. Tako je tudi pri oktavi, kjer dobimo namesto faktorja 2 ulomek s šestmestnim imenovalcem. Njegova vrednost je približno 2.0273. Če to število delimo z dve, da se vrnemo k osnovnemu tonu, dobimo namesto 1 približno vrednost 1.0136. To odstopanje je poznano pod imenom *pitagorejska* ali *ditonična koma*.

O razlogu zanjo in o kitari pa v naslednji številki Preseka.

Marija Vencelj

NAJKRAJŠI ČAS POTOVANJA – Rešitev s str. 195

Na začetku potovanja (točka L na sliki 1) se dva študenta odpeljeta z motorjem, tretji pa se odpravi na pot peš. V točki B na oddaljenosti y od Maribora začne eden od potnikov z motorja pešačiti, drugi pa se z motorjem vrne po prvega pešca, ki ga sreča na razdalji x (v točki A) od Ljubljane. S prvim pešcem se motorist ponovno odpelje proti Mariboru, kjer na koncu poti (M) dohiti drugega pešca.