PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **2** (1975/1976)
Številka 1
Strani 15–19

Franci Oblak:

NEKAJ O RAZCEPU NEKATERIH VEČČLENIH IZRAZOV

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/2/3-1-Oblak.pdf

NEKAJ O RAZCEPU NEKATERIH VEČČLENIH IZRAZOV

Iz različnih razlogov hočemo večkrat spremeniti vsoto v produkt. Ta postopek se seveda ne posreči vedno. V nekaterih primerih pa gre prav lepo in take primere si bomo ogledali. Navedimo najprej nekaj znanih formul, ki jih preverimo preprosto tako, da izraz na desni zmnožimo in dobimo izraz na levi strani enakosti.

1. $ax + ab = a(x+b)$
2. $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$
3. $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)(x+a) = (x+a)^2$
4. $x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab = (x+a)(x+b)$
5. $acx^2 + (bc+ad)x + bd = acx^2 + bcx + adx + bd = (ax+b)(cx+d)$

Prve tri formule menda vsi dobro poznate:

1. je izpostavljanje skupnega faktorja
2. je formula za razliko kvadratov
3. je formula za kvadrat tričlenika
4. in 5. pa sta formuli za razstavljanje tričlenih izrazov.

Včasih nam koristi še formula za razstavljanje štiričlenih izrazov:

6. $ax + bx + ay + by = (a+b)x + (a+b)y = (a+b)(x+y)$,

ki je v bistvu zaporedna uporaba formule 1, ta pa je eden osnovnih računskih zakonov: distributivnost množenja glede na seštevanje ali razčlenitveni zakon, prebran z uporabo simetričnosti enakosti. (Simetričnost enakosti je naslednja lastnost enakosti: če je $a = b$, potem je tudi $b = a$, torej čitanje enakosti z desne na levo!)

Omejili se bomo le na cele vrednosti parametrov a, b, c in d. Torej $a, b, c, d \in Z$. $Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3\ \ldots\}$. To je množica celih števil!

Poglejmo nekaj zgledov uporabe prvih treh pravil:

1. $x^2 - 81 = x^2 - 9^2 = (x+9)(x-9)$
2. $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2.5x + 5^2 = (x+5)^2$

3. $x^2 - 100 = x^2 - 10^2 = (x+10)(x-10)$

4. $x^2 - 14x + 49 = x^2 + 2.(-7)x + (-7)^2 = (x+(-7)^2) = (x-7)^2$

5. $6x + 18 = 6x + 6.3 = 6(x+3)$

Kdaj pravimo, da znamo razstavljati po prvih treh formulah? Vsa umetnost je v tem, da hitro računamo na pamet in "vidimo", da je npr. $81 = 9^2$, da je $-14 = 2\cdot(-7)$, pa hkrati še $49 = (-7)^2$ itd. Nujno je dobro poznavanje seštevanke in poštevanke celih števil!

Pa se lotimo še formule 4. Najprej jo opazujmo:

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

Izraz ima tri člene: x^2 je kvadratni člen, mislimo si ga zapisanega kot $1\cdot x^2$, pravimo, da je koeficient kvadratnega člena 1, $(a+b)x$ je linearni člen s koeficientom $(a+b)$. Pa še prosti člen ab.

$$1\cdot x^2 \quad + \quad \overset{\text{koeficient lin. člena}}{(a+b)}x \quad + \quad ab$$

kvadratni člen linearni člen prosti člen

Po formuli 5 vidimo, da se da razstaviti v $(x+a)(x+b)$.
Npr.: $x^2 + (3+9)x + 3\cdot 9 = (x+3)(x+9)$. Zakaj sploh nastanejo preglavice pri razstavljanju tričlenika? Vsa skrivnost je v tem, da sta vsota in produkt navadno že izračunana. Tako ne dobimo za razstavljanje tričlenik $x^2 + (3+9)x + 3\cdot 9$, temveč tričlenik $x^2 + 12x + 27$ in sedaj moramo s poskušanjem ugotoviti, kateri celi števili sta taki, da je njun produkt 27 (prosti člen) in njuna vsota 12 (koeficient linearnega člena). Če pa hitro računamo, je za eno- in dvomestna cela števila postopek res preprost. Kar poglejmo:

Razstavi: $x^2 + 3x + 2$; na pamet premišljujemo takole: prosti člen je 2, ki pa mora biti produkt dveh takih celih števil, da bo vsota teh dveh števil 3. V hipu vidimo, da sta to števili 1 in 2, ker je $2 = 1\cdot 2$ in je $3 = 1 + 2$. Tako tričlenik razstavimo: $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Brez komentarja poglejmo drug primer:

$x^2 + 10x + 21 = (x+3)(x+7)$, saj je: $21 = 1\cdot 21$ ne pride v poštev
$= 3\cdot 7$ in $3 + 7 = 10$

$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$;
$-3 = -1\cdot 3 = 1\cdot(-3)$ in $-1 + 3 = 2$.

Premišljamo: produkt je negativen, zato je en faktor negativen. Vsota je pozitivna, torej je pozitiven faktor z večjo absolutno vrednostjo.

In še : $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ $\qquad$ $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

$-6 = -3 \cdot 2 = 1 \cdot (-6)$ $\qquad$ $12 = -1(-12) = (-2)\cdot(-6) =$

$-3 + 2 = -1$ $\qquad$ $= (-3)\cdot(-4)$

(Vse te račune napravimo na pamet!) $\quad$ $-3 + (-4) = -7$

In še: $x^2 - 2x + 3 = ?$ $\qquad$ $3 = 1 \cdot 3 = (-1)\cdot(-3)$

(Primer, da se razcep ne posreči vedno.)

VAJE

Razcepi:

1. $x^2 - 4 =$
2. $x^2 + 6x + 9 =$
3. $x^2 + 7x + 10 =$
4. $3a + 6b =$
5. $a^2 - 121 =$
6. $a^2 - 8a + 16 =$
7. $a^2 - 10a + 21 =$
8. $6a^2 + 4ab =$
9. $x^2 - 10\,000 =$
10. $x^2 + 30x + 225 =$
11. $x^2 + 2x - 24 =$
12. $2x^3 + 2x^2 - 24x =$
13. $1 - a^2 = 1^2 - a^2$
14. $-c^2 + 2c - 1 = -(c^2 - 2c + 1) =$
15. $z^2 - 9z - 36 =$
16. $4a^2b - 36b =$

Po vseh teh vajah smo dovolj oboroženi, da se lotimo še zadnjega primera, kjer je vsa umetnost v pravilnem prepisu tričlenika v štiričlenik!

$$acx^2 + (bc+ad)x + bd = acx^2 + bcx + adx + bd = cx(ax+b) + d(ax+b) =$$
$$= (ax+b)(cx+d)$$

Takole razmišljamo: če zmnožim $(ac)(bd) = acbd = (bc)(ad)$, sem spet dobil dva faktorja, katerih vsota je koeficient pri linearnem členu $(bc+ad)$. To je pa tudi vse. Kar na delo:

1. $6x^2 + 7x + 2 = 6x^2+3x+4x+2=3x(2x+1)+2(2x+1)=(2x+1)(3x+2)$
   $6 \cdot 2 = 12 = 3 \cdot 4$, ker je $3 + 4 = 7$
2. $15x^2 + 23x + 4 = 15x^2+3x+20x+4=3x(5x+1)+4(5x+1)=(5x+1)(3x+4)$
   $15 \cdot 4 = 60 = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20$, ker je $3 + 20 = 23$
3. $6x^2 + x - 15 = 6x^2-9x+10x-15=3x(2x-3+5(2x-3)=(2x-3)(3x+5)$
   $6\cdot(-15) = -90 = -1\cdot 90 = -2\cdot 45 = -3\cdot 30 = \ldots = -9\cdot 10$, ker je $-9+10 = 1$ (ta pri x sicer ni napisan, ampak $x = 1\cdot x$)
4. $12x^2 - 19x - 21 = 12x^2-28x+9x-21=4x(3x-7)+3(3x-7)=(3x-7)(4x+3)$
   $12\cdot(-21) = -252 = -28\cdot 9$, ker je $-28+9 = -19$

Možnosti, ko je negativni faktor po absolutni vrednosti manjši od pozitivnega, sploh ne preizkusimo, ker mora biti vsota negativna.

Primere, kot (7·(-36)) in podobno, pa kaj hitro na pamet preletimo. Seveda pa zaradi kontrole vedno napravimo preskus na pamet z množenjem rezultata.

Za konec še nekaj vaj!

Razcepi in napravi preskus:

17. $2x^2 - 3x - 14 =$
18. $12a^2 - 23a + 5 =$
19. $4b^2 + 6b + 2 =$
20. $9a^2 - 9a + 2 =$
21. $35m^2 - 2m - 1 =$
22. $15a^2 + a - 2 =$
23. $14x^2 - 17x - 6 =$
24. $24a^2 - 22a - 35 =$
25. $54x^2 - 231x - 490 =$
26. $3x^2 - 4x + 2 =$

27. (Iz knjige Franceta Križaniča: Križem po matematiki, MK Ljubljana 1960)

Opic trop je skrit v votlini.
Tri odvzemi vseh petini
in kvadriraj, kar ostane.
To vseh skritih je število.
Eni le se ni ljubilo
med tovarišice zbrane,
pa se urno vzpne med veje,
prekopica se in smeje
razposajenost igriva.
Jasnooka Lilavati!
Daj, poskusi razvozlati,
koliko se opic skriva?

REŠITEV, (omenjena knjiga, str.23)

To nalogo je postavil Bhaskara Učeni (Bhaskara Acarya, rojen leta 1114). Mi bomo kaj urno zapisali te verze v moderni pisavi - matematiščini. Število vseh opic zaznamujemo s črko x. Od petine vseh opic $x/5$ odštejemo 3, kakor nam naroča Učeni. Tako dobimo $x/5 - 3$. Kvadrat tega števila $(x/5 - 3)^2$ pove, koliko opic tiči v votlini. Če k tem dodamo še razposajenko, ki rogovili po drevju, dobimo celoten trop:

$(x/5 - 3)^2 + 1 = x$ in naprej

$x^2/25 - 6x/5 + 10 = x \quad /\cdot 25$

$x^2 - 55x + 250 = 0$

Uporabi, kar si se naučil pri razcepljanju tričlenih izrazov!

$(x-5)(x-50) = 0 \qquad x_1 = 5, \quad x_2 = 50$

ali glej omenjeno knjigo, str.168,169.