BROWNOVO GIBANJE

Zapis o Perrinovih poskusih s sedimentacijskim ravnovesjem v prejšnji številki Preseka je utegnil zbuditi vtis, da delci, ki jih opazujemo z mikroskopom, v kapljevini mirujejo. Navidezno mirovanje je s Perrinovimi besedami "zgolj utvara, ki izhaja iz nepopolnosti čutil; v resnici mu ustreza nenehno močno, neurejeno gibanje". Posvetimo nekaj pozornosti gibanju delcev, za katere smo zadnjič rekli, da lebdijo v kapljevini.

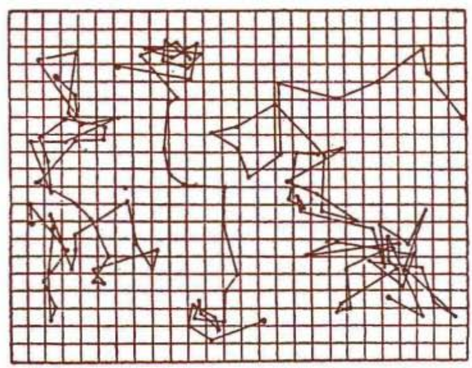
Lastnosti snovi so z atomsko zgradbo najprej pojasnili v *kinetični teoriji plinov*. V njej so plin opisali kot množico enakih molekul, ki se neurejeno gibljejo in trkajo s steno posode ter med seboj. Molekule so tako majhne, da tega gibanja ni mogoče neposredno opazovati. Ali ga je mogoče opazovati posredno? Tudi valov na morju v veliki oddaljenosti ne moremo neposredno opazovati. Lahko pa jih opazujemo posredno, če zasledujemo, kako valovi zibljejo ladjo. Čim manjša je ladja, tem bolj jo zibljejo. Vlogo ladje imajo v kapljevini delci, ki jih je mogoče opazovati z mikroskopom. Molekule trkajo vanje z vseh strani. Trki so naključni: zdaj trči več molekul z leve in delec odskoči na desno, zdaj jih trči več z desne in delec odskoči na levo. Premislek velja za katero koli smer. Iz njega izhaja, da se delec v prostoru giblje neurejeno. To je *Brownovo gibanje.*

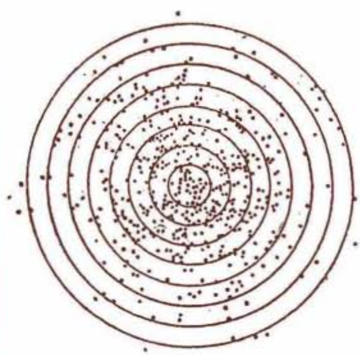
Botanik Robert Brown je leta 1827 opazil neurejeno gibanje cvetnega prahu v vodi. Najprej je mislil, da se delci gibljejo, ker so živi. Pozneje pa je ugotovil, da se gibljejo tudi delci barvila. Že leta 1877 so domnevali, da je to gibanje posledica termičnega gibanja molekul v kapljevini. Leta 1889 so uvideli, da se delci tem živahneje gibljejo, čim manjši so. Ali bi pri opazovanju Brownovega gibanja z mikroskopom lahko kaj izmerili, da bi atomsko zgradbo podprli s številskimi podatki? Poskušali so izmeriti povprečno hitrost delca, a ugotovili, da je izid močno odvisen od razdalje med točkama, v katerih so opazili delec in med katerima so izračunali povprečno hitrost. Opazovanja so od vsega začetka motili tokovi v kapljevini, ki jo je segrevala za osvetlitev potrebna svetloba.

Pot naprej sta s teorijo Brownovega gibanja, neodvisno drug od drugega, nakazala Albert Einstein leta 1905 in Marian Smoluchowski leto zatem. Pozornost sta preusmerila na premik določenega delca v določenem času Δt iz točke, v kateri so ga opazili na začetku, do točke, v kateri so ga opazili pozneje. Einstein sploh ni bil prepričan, da bo mogoče novo teorijo uporabiti za Brownovo gibanje: "Članek bo pokazal, da se, po molekulsko-kinetični teoriji toplote, delci, ki jih vidimo z mikroskopom in ki lebdijo v kapljevini, zaradi termičnega gibanja molekul gibljejo tako, da to gibanje zlahka zaznamo z mikroskopom. Mogoče se to ujema s t.i. 'Brownovim molekulskim gibanjem', toda razpoložljivi podatki o slednjem so tako nenatančni, da si o zadevi ne morem ustvariti dokončnega mnenja." Končal pa je z upanjem, "da bo kakemu raziskovalcu kmalu uspelo rešiti postavljeni problem, ki je tako pomemben v teoriji toplote". Vse kaže, da je bil to izziv za Jean-Baptista Perrina in njegove sodelavce, da so se lotili merjenj s sedimentacijskim ravnovesjem in Brownovim gibanjem.

Na kratko opišimo merjenja. Z mikroskopom z navpično osjo so na vodoravnem zaslonu naredili sliko, na kateri so zaznamovali lego delca na začetku in v enakomernih časovnih razmikih po Δt. Tako so dobili množico točk, katerih zveznice so projicirali na os x (slika 1). V vodoravni ravnini so vse smeri enakopravne in lahko os x poljubno izberemo. Če se je delec znatno premaknil navzgor ali navzdol, je ušel iz vidnega polja. Gibanje v navpični smeri ni bilo enakovredno gibanju v vodoravni smeri, če se je gostota snovi, iz katere so bili delci, razlikovala od gostote kapljevine.

Zaznamujmo lego delca v času 0, v času Δt, v času $2\Delta t$ itn. Projekcija prvega premika na os x meri x_1, projekcija drugega x_2 itn. Premiki na eno stran so enako verjetni kot premiki na drugo, tako da je povprečni premik,





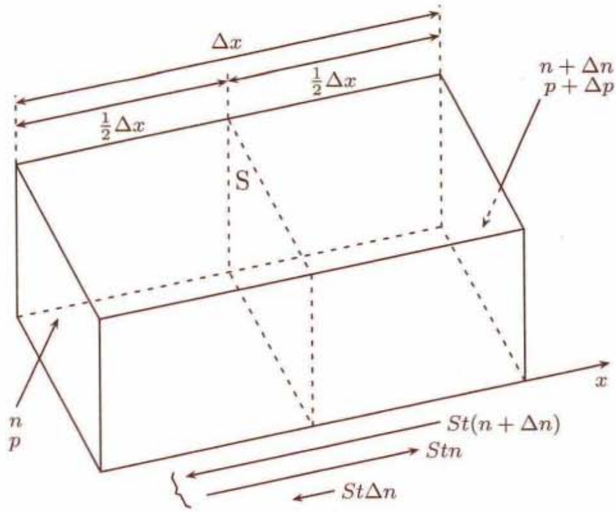
Slika 1. Perrin je v enakih časovnih razmikih določil lego delca in zaporedne lege povezal z daljicami. Stranici kvadratkov na risbi ustreza v kapljevini 3,1 tisočine milimetra. Ob tem je zapisal, da zlomljena črta "da samo bledo sliko čudovite zapletenosti pravega tira" (levo). Pri nekem drugem poskusu je Perrin premike delcev vzporedno premaknil tako, da so vse začetne lege delcev prišle v izhodišče. Lego delcev je določal na vsake pol minute in v celoti opazoval 500 premikov delcev s polmerom po 0,37 tisočine milimetra. Koren iz povprečnega kvadratnega premika je meril 7,8 tisočine milimetra, krogi pa imajo polmere $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, ... te vrednosti. Število delcev v vse večjih kolobarjih je 34, 78, 106, 103, 75, 49, 30, 17, 9, medtem ko napove račun 32, 83, 107, 105, 75, 50, 50, 27, 14, 7. Povprečni kvadratni premik v ravnini je $\overline{x^2+y^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} = 2\overline{x^2}$ (desno).

ki ga dobimo, ko seštejemo premike v času Δt za veliko število delcev in delimo s številom delcev, enak 0. Kvadrirajmo premik in izračunajmo povprečje $\overline{x_1^2}$, $\overline{x_2^2}$, ... Povprečna kvadratna premika sta enaka: $\overline{x_1^2} = \overline{x_2^2} = \overline{x^2}$. Na gibanje v določenem časovnem razmiku prejšnje gibanje tega delca ne vpliva. Delec "pozabi", kaj se je z njim dogajalo prej. Seštejmo premika v zaporednih časovnih razmikih. Za skupni povprečni kvadratni premik dobimo $\overline{(x_1 + x_2)^2} = \overline{x_1^2} + \overline{x_2^2} = 2\overline{x^2}$. V povprečju namreč mešani člen $2\overline{x_1 \cdot x_2}$ nič ne prispeva, ker naletimo na pozitivni produkt enako pogosto kot na negativnega. Za povprečni kvadratni premik po $\mathcal{N}$ korakih, t.j. po času $t = \mathcal{N}\Delta t$, dobimo po tej poti $\mathcal{N}\overline{x^2}$. Po tem sklepamo, da je povprečni kvadratni premik sorazmeren s časom in je količnik $\overline{x^2}/t$ za delec z danim polmerom in dano gostoto v določeni kapljevini konstanten.

Perrin in sodelavci so izmerili količnik $\overline{x^2}/t$ za nekaj skupin delcev iz smol gumi-gut in mastiks. Delci ene skupine so imeli enak polmer. Opazovali so skupine delcev z različnimi polmeri v vodi in v vodni raztopini soli ter glicerina. Tako so v dokaj širokem obsegu spreminjali polmer kroglic, gostoto kapljevine in njeno viskoznost. Iz dobljenih podatkov so izračunali Avogadrovo število. Rezultati so se zadovoljivo ujemali z rezultati, ki jih je dalo merjenje s sedimentacijskim ravnovesjem. Čeprav so dobili nekoliko preveliko Avogadrovo število, je bilo to ob svojem času zelo pomembno. Prepričalo je dvomljivce, da so sprejeli zamisel o atomski zgradbi snovi.

V nadaljevanju nakažimo Einsteinovo računsko pot, ki je vodila Perrina. Začnimo s predelano plinsko enačbo $p = nkT$, v kateri je p tlak plina in $n = N/V$ gostota molekul plina. Enačba velja za osmozni tlak, če vstavimo za n gostoto molekul raztopljene snovi, t.j. število molekul N raztopljene snovi v prostornini kapljevine V. V tej obliki velja enačba tudi za mikroskopske delce v kapljevini, ko je n gostota števila delcev ali kratko gostota delcev.

Vzemimo, da se gostota delcev spreminja s krajem. Zaradi lažjega razmišljanja naj enakomerno narašča v smeri osi x. Brownovo gibanje nosi delce v smeri osi x in v nasprotni smeri. Delci, ki se gibljejo v nasprotni smeri osi x, prihajajo z območja z večjo gostoto $n + \Delta n$, delci, ki se gibljejo v smeri osi x, pa z območja z manjšo gostoto n. Zato je prvih delcev več kot drugih in se v nasprotni smeri osi x pojavi tok delcev (slika 2). Gostota tega toka j, t.j. število presežnih delcev,



Slika 2. Namišljena prizma v kapljevini s presekom S in z robovi, vzporednimi z osjo x. V smeri te osi naraščata gostota delcev in ustrezni tlak. Delci v kapljevini difundirajo v nasprotni smeri, kot narašča gostota delcev.

deljeno s presekom S in časom t, je tem večje, čim večja je razlika gostot Δn in čim manjša je razdalja Δx; sorazmerna je $\Delta n/\Delta x$. Iz tega izhaja *difuzijski zakon z difuzijsko konstanto D*:

$$j = D\frac{\Delta n}{\Delta x}\,.$$

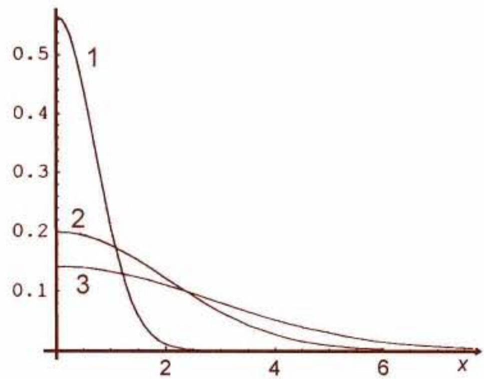
Pogosto z minusom na njegovi desni strani opozorimo na to, da se presežek delcev giblje z desne na levo, če gostota delcev narašča z leve na desno. Enako obliko imata zakona za prevajanje toplote in elektrike.

Zdaj opazujmo prehod delcev skozi presek na sredi prizme (slika 2). Vzemimo, da je dolžina Δx enaka $\sqrt{\overline{x^2}}$. Tedaj je skozi presek na sredi prizme v levo polovico prizme z desne prešlo $S\cdot\frac{1}{2}\Delta x\cdot(n+\Delta n)$ delcev in v desno polovico prizme z leve $S\cdot\frac{1}{2}\Delta x\cdot n$ delcev. Razlika obeh prispevkov se mora ujemati s številom delcev, ki po difuzijskem zakonu v času t preidejo skozi srednji presek S. Iz enačbe $\frac{1}{2}S\Delta x\cdot\Delta n = StD\Delta n/\Delta x$ izhaja

$$D = \tfrac{1}{2}\tfrac{(\Delta x)^2}{t} = \tfrac{1}{2}\tfrac{\overline{x^2}}{t}\,.$$

Izpeljava ni neoporečna. Einstein jo je podprl s tem, da je povprečni kvadrat premika izračunal naravnost s porazdelitvijo delcev po kapljevini (slika 3).

Izravnavanju gostote delcev po raztopini nasprotuje upor kapljevine. Za silo kapljevine na delec uporabimo Stokesov linearni zakon upora za kroglico $F_1 = 6\pi r_1 \eta v$. Pri tem je r_1 polmer delca, η viskoznost kapljevine in v hitrost delca glede na kapljevino. Na levi osnovni ploskvi prizme ustreza delcem tlak p, na desni v oddaljenosti Δx pa je tlak $p + \Delta p$. Razliko sil $S(p + \Delta p) - Sp = S\Delta p$ uravnovesi skupni upor kapljevine za delce v prizmi $n(S\Delta x)F_1$. Tako dobimo $nF_1 = \Delta p/\Delta x$,



Slika 3. Porazdelitev delcev v kapljevini, če so na začetku pri $t = 0$ vsi v izhodišču. Einstein je za porazdelitev navedel funkcijo $\mathrm{e}^{-x^2/4Dt}/\sqrt{4\pi Dt}$ in z njo izračunal $\overline{x^2} = 2Dt$. Za delce s polmerom 0,5 μm v vodi s temperaturo 17 °C in z viskoznostjo $1,35 \cdot 10^{-3}$ kg/ms je napovedal $\sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{t} \cdot 0,8$ μm, torej v eni minuti $\sqrt{\overline{x^2}}$ okoli 6 μm. Pripomnil je, da je "porazdelitev enaka kot za naključne napake". Za porazdelitve 1, 2 in 3 so povprečni kvadratni premiki $\overline{x^2}$ v razmerju 1:8:16 in v enakem razmerju so ustrezni časi t, saj je količnik $\overline{x^2}/t$ za vse tri enak. Primerjaj s sliko 1.

r_1	m	η	premiki	N_A
0,21 μm	$48 \cdot 10^{-8}$ kg	0,001 kg/ms	900	$6,95 \cdot 10^{26}$
0,38	290	0,125	100	6,4
0,37	246	0,001	1500	6,9

Nekaj podatkov o Perrinovih merjenjih s kroglicami smole gumi-gut. V stolpcih si sledijo podatki o polmeru kroglic, njihovi efektivni masi, viskoznosti, številu preštetih premikov in izračunanem Avogadrovem številu. Današnja vrednost, s katero je računal že Einstein v svojem članku, je $6,0 \cdot 10^{26}$. Zakaj so bila Perrinova merjenja odločilna, čeprav so že prej poznali Avogadrovo število, bo poskušal pojasniti prispevek v eni od prihodnjih številk.

ko oba izraza izenačimo. Z izrazoma za D in F_1 ter "plinsko" enačbo sledi za gostoto toka delcev

$$j = nv = \frac{nF_1}{6\pi r_1 \eta} = \frac{\Delta p}{\Delta x} \cdot \frac{1}{6\pi r_1 \eta} = \frac{kT}{6\pi \eta r_1} \frac{\Delta n}{\Delta x} .$$

Z difuzijskim zakonom nazadnje izračunamo Avogadrovo število z enačbo, ki jo je uporabil Perrin:

$$N_A = \frac{R}{k} = \frac{RT}{3\pi \eta r_1 (\overline{x^2}/t)} .$$

Korak od ene enačbe do druge ni posebno težaven. Vendar je takih, med seboj povezanih korakov toliko, da je težko obdržati v mislih rdečo nit od izidov merjenja do končnega rezultata. To je eden od razlogov, da se zdi fizika težavna.

Janez Strnad

ČRKE IN ŠTEVILA – Rešitev s str. 170

Rešitev:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
5	7	2	9	1	4	6	3	8

V zvezi z nalogo se nam je oglasil bralec Robert Meolic iz Maribora, ki je zastavljeno nalogo pravilno rešil. Hkrati se je vprašal, ali je naloga tudi enolično rešljiva, če vrednosti za A in F nista vnaprej določeni, in sam ugotovil, da sta podatka A = 5 in F = 4 nepotrebna.

Res je! Naloga ima eno samo rešitev (seveda zgornjo), četudi ne predpišemo za nobeno črko vrednosti vnaprej. Dve sta bili vnaprej navedeni zato, da smo manj izkušenim bralcem olajšali reševanje.

Za ostale je pa tale zapis lahko novi izziv!

Boštjan Jaklič