TLAK POJEMA Z VIŠINO

Vprašanje, kako v kapljevini in v plinu tlak pojema z višino, pripelje do zanimivih sklepov, če smo pripravljeni malo računati. Pri tem si pomagamo z žepnim računalom. Rezultati, dobljeni za molekule v plinu, veljajo tudi za velike delce, ki lebdijo v kapljevini in ki jih je mogoče videti z mikroskopom. Ti rezultati so imeli pomembno vlogo v razpravi o obstoju atomov in molekul pred devetdesetimi leti.

V mirujoči tekočini tlak pojema z naraščajočo višino ali narašča z naraščajočo globino. Tega se dobro zavedajo tudi potapljači. Tlak naraste za 1 bar, ko se potopijo za 10 m (1 bar $= 10^5$ N/m^2 je približno enak zračnemu tlaku na morsko gladino; enota za tlak v mednarodnem sistemu je N/m^2 ali pascal). Da pojasnimo to, si v vodi predstavljajmo navpično prizmo s spodnjo osnovno ploskvijo S v višini z_0 in zgornjo v višini z. Na spodnjo osnovno ploskev deluje sila vode $Sp(z_0)$ navpično navzgor in na zgornjo sila vode $Sp(z)$ navpično navzdol. Prizma miruje, zato je vsota teh dveh sil in teže prizme $mg = \rho Szg$, ki deluje navpično navzdol, enaka nič. $g = 10$ m/s^2 je težni pospešek in $\rho = 10^3$ kg/m^3 gostota vode. Iz tega izhaja razlika tlakov

$$p(z) - p(z_0) = -\rho g(z - z_0)\,, \tag{1}$$

če višino z štejemo pozitivno navpično navzgor. V globini $z_0 = -10$ m je tlak za $10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 10\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 10\ \mathrm{m} = 10^5\ \mathrm{N/m^2} = 1$ bar večji kot na gladini pri $z = 0$. Vselej, ko se spustimo za 10 m, se tlak poveča za 1 bar. Voda se namreč zaradi povišanega tlaka le neznatno zgosti. Privzeti smemo, da se gostota z globino ne spreminja.

V zraku lahko računamo tako le pri majhni višinski razliki. Pri navadnem zračnem tlaku $p_0 = 1$ bar meri gostota zraka $\rho_0 = 1{,}2$ kg/m^3. Zračni tlak se zmanjša za $1{,}2\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 10\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 10\ \mathrm{m} = 120\ \mathrm{N/m^2}$ od 1 bara na 0,9988 bara, ko se od višine 0 dvignemo za 10 m.

Kako visoko (z_r) bi bilo ozračje, če bi po vsej višini imelo gostoto, ki jo ima pri tleh? Iz enačbe (1) sledi $z_r = p_0/\rho_0 g = 10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}}/1{,}2\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot$ $\cdot\, 10\ \mathrm{m\,s^{-2}} = 8330$ m.

Gostota plina se zmanjša, ko se zniža tlak, in je pri konstantni temperaturi sorazmerna s tlakom. Pri tlaku 0,9988 bara v višini 10 m meri gostota zraka $1{,}2 \cdot 0{,}9988$ kg/m^3 $= 1{,}1986$ kg/m^3. Sprememba gostote je majhna, a jo moramo upoštevati, če sprememba višine ni majhna v primeri z z_r. Gostota je odvisna od tlaka in tlak od gostote. Pomagamo si tudi z omenjenim spoznanjem o gostoti plina pri konstantni temperaturi. Iz $\rho/\rho_0 = p/p_0$ izhaja

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{p_0} p(z) \, .$$

Zvezo vstavimo v enačbo (1) in upoštevamo, da se sme višina samo malo spremeniti. Za z vstavimo $z + \Delta z$, za z_0 pa z:

$$\frac{p(z + \Delta z) - p(z)}{p(z)} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \Delta z = -\frac{\Delta z}{z_r} \, . \tag{2}$$

Višino večajmo v enakih korakih po $\Delta z = 10$ m: v prvem od 0 na Δz, v drugem od Δz na $2\Delta z$, v tretjem od $2\Delta z$ na $3\Delta z$, ... v koraku $\mathcal{N}$ od $(\mathcal{N} - 1)\Delta z$ na $\mathcal{N}\Delta z$. Lahko si mislimo, da se dvigamo po stopnišču z visokimi stopnicami. Desna stran enačbe (2) ostane nespremenjena, na levi strani pa dobimo po vrsti $p(\Delta z) - p_0$, $p(2\Delta z) - p(\Delta z)$, $p(3\Delta z) - p(2\Delta z)$, ... $p(\mathcal{N}\Delta z) - p((\mathcal{N} - 1)\Delta z)$. Nato zidamo:

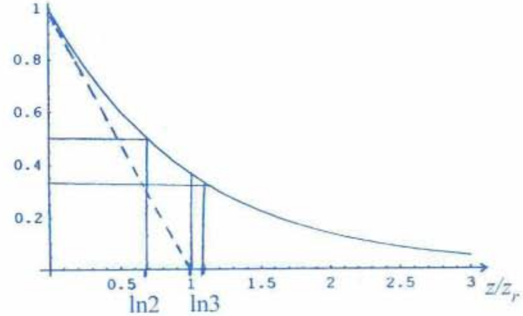
$$\begin{aligned}
p(\Delta z) &= p_0(1 - \Delta z/z_r) \, , \\
p(2\Delta z) &= p(\Delta z)(1 - \Delta z/z_r) = p_0(1 - \Delta z/z_r)^2 \, , \\
p(3\Delta z) &= p(2\Delta z)(1 - \Delta z/z_r) = p_0(1 - \Delta z/z_r)^3 \, , \\
&\vdots \\
p(\mathcal{N}\Delta z) &= p((\mathcal{N} - 1)\Delta z)(1 - \Delta z/z_r) = p_0(1 - \Delta z/z_r)^{\mathcal{N}} \, .
\end{aligned}$$

Z zadnjo enačbo lahko izračunamo tlak po poljubnem koraku $\mathcal{N}$ v višini $z = \mathcal{N}\Delta z$ (slika 1). Naraščanju tlaka ustreza geometrijsko zaporedje, če naraščanju višine ustreza aritmetično. Lahko bi vzeli manjši korak kot $\Delta z = 10$ m. Precej večji korak pa ne bi dal uporabnega izida. Približek je tem boljši, čim manjši je korak. Tako smo tlak izračunali po korakih.

Kako se spreminja tlak, ko se dvigamo po gladkem klancu brez stopnic, ugotovimo, ko si predstavljamo, da postajajo stopnice vse nižje. Iz matematike si sposodimo enačbo $\lim_{x\to\infty}(1 - 1/x)^x = 1/e = e^{-1}$. Indeks $x \to \infty$ pomeni, da x naraste čez vsako mejo. Z e smo zaznamovali *osnovo naravnih logaritmov* $e = 2{,}71828\ldots$ Zares z računalom za $(1 - 1/x)^x$ z $x = 10$, 10^4 in 10^7 po vrsti dobimo 1/2,86797, 1/2,71842 in 1/2,71828. Vstavimo $\mathcal{N}\Delta z = z$ in $\mathcal{N} z_r/z = x$, pa imamo

$$p(z) = p_0 \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x \right]^{z/z_r} = p_0 e^{-z/z_r} \, . \tag{3}$$

$\mathcal{N}$	z	p	
0	0	1,0000 bar	
200	2 km	0,7869	
400	4	0,6185	
577	5,77	0,5002	z_2
600	6	0,4864	
800	8	0,3825	
833	8,33	0,3678	z_r
915	9,15	0,3333	z_3
1000	10	0,3008	
1200	12	0,2366	
1400	14	0,1862	
1600	16	0,1464	
1800	18	0,1152	
2000	20	0,0906	
2200	22	0,0712	



Slika 1. Odvisnost razmerja p/p_0, ρ/ρ_0 ali n/n_0 od razmerja z/z_r v ozračju pri temperaturi okoli 20°C za korak $\Delta z = 10$ m.

Enakovreden je zapis $p(z) = p_0 \cdot 2^{-z/z_2}$, na katerega naletimo včasih. Lahko bi zapisali tudi $p(z) = p_0 \cdot 3^{-z/z_3}$ in tako dalje s poljubno osnovo. Na *relaksacijski višini* $z_r = 8330$ m se zmanjša tlak na $1/e = 0{,}3679$ vrednosti, ki jo ima pri tleh. To je tudi povprečna višina ozračja. Na *razpolovni višini* $z_2 = 5770$ m se zmanjša tlak na polovico in na višini $z_3 = 9150$ m na tretjino vrednosti pri tleh.

Eksponentna funkcija (3), do katere smo se nekoliko okorno dokopali, je ena od najpomembnejših *elementarnih funkcij* v fiziki. Nanjo naletimo med drugim še pri radioaktivnem razpadanju, absorpciji svetlobe, prehodnih pojavih v električnih vezjih. Njena inverzna funkcija je *naravni logaritem*. (Mimogrede: velja $e^{-x} = 2^{-x/\ln 2}$ in $z_2 = z_r \ln 2$ ter $e^{-x} = 3^{-x/\ln 3}$ in $z_3 = z_r \ln 3$.)

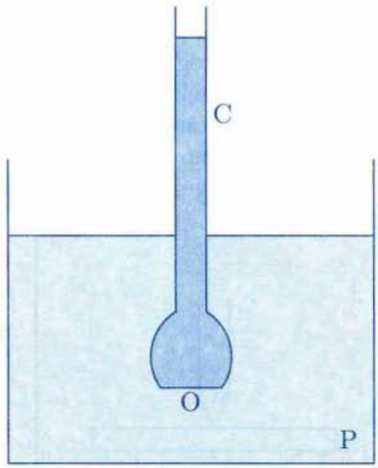
Pri dani temperaturi sta tlak in gostota ρ sorazmerna in gostota ρ je sorazmerna z gostoto molekul $n = \rho/m_1$, če je m_1 masa ene molekule. Zato tudi gostota in gostota molekul z višino eksponentno pojemata: $\rho = \rho_0 e^{-z/z_r}$ in $n = n_0 e^{-z/z_r}$. Pri tem sta ρ_0 in n_0 gostota in gostota molekul v višini $z = 0$.

Izraz za relaksacijsko višino lahko nekoliko preuredimo, če s plinsko enačbo nekoliko bolj splošno zapišemo zvezo med tlakom in gostoto: $p = \rho RT/M$. Pri tem je $R = 8313$ J/K splošna plinska konstanta in

$M = m_1 N_A$ masa kilomola. *Avogadrovo število* N_A pove število molekul v kilomolu. Z vsem tem dobimo

$$z_r = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{kT}{m_1 g} \quad \text{in} \quad \frac{z}{z_r} = \frac{m_1 g z}{kT} \, . \tag{4}$$

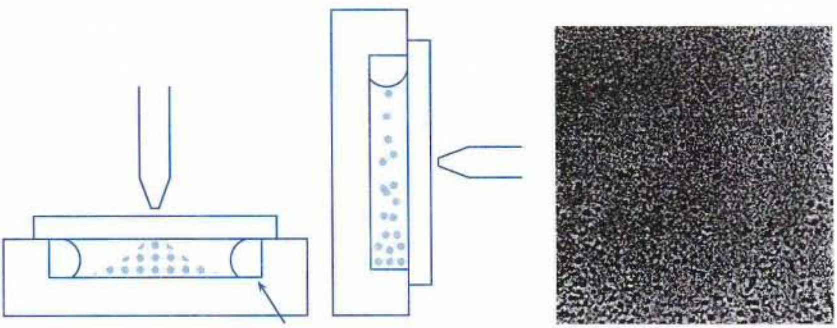
Pri tem smo vpeljali *Boltzmannovo konstanto* $k = R/N_A$. V zadnjem razmerju je $m_1 g z$ potencialna energija molekule, kT za termično gibanje pri temperaturi T tipična energija. Relaksacijska višina doseže 124 km za vodik, 8,91 km za dušik in 7,79 km za kisik. V ravnovesju bi se ti plini po višini v ozračju porazdelili skladno s temi podatki, če bi bila temperatura konstantna. Temperatura v ozračju pojema z naraščajočo višino, zato račun odpove. Vseeno pa pojasni, da je Zemlja izgubila vodik zaradi razmeroma šibke gravitacije.



Slika 2. Veljavnost enačbe $p = \rho RT/M$ v raztopini je mogoče neposredno preskusiti. Spodnje krajišče odebeljene cevi C je zaprto s polprepustno opno O. V cevi je v prostornini vode V raztopljena snov z maso m – pri tem velja $\rho = m/V$ – in maso kilomola M. Cev je potopljena v posodo s čisto vodo P. Voda skozi opno prehaja v cev, raztopljena snov pa ne more uhajati iz cevi. V ravnovesju je gladina raztopine v cevi višja kot gladina vode v posodi. Višinski razliki ustreza *osmozni tlak*, ki lahko doseže znatne vrednosti. V raztopini sladkorja, ki vsebuje na primer 0,3 mola v litru vode, doseže 7 barov. Pojav je zelo pomemben v biologiji, saj npr. poganja vodo po rastlinah navzgor. Odkrili so ga sredi 18. stoletja in ga kmalu podrobneje raziskali. Leta 1886 je Jacobus van't Hoff ugotovil, da za raztopljeno snov v kapljevini velja enaka enačba kot za plin. To je mogoče na hitro utemeljiti, češ da je raztopljena snov v ravnovesju s svojo paro, za katero velja plinska enačba. Učeno rečemo, da se ujemata njuna kemijska potenciala. Izvor tlaka v kapljevini pa je drugačen kot v plinu, o čemer priča to, da velja enačba v kapljevini le pri majhni koncentraciji raztopljene snovi.

Pomembno je, da enačbi (3) in (4) ne veljata samo za plin in za molekule v njem, ampak tudi za snov, ki je raztopljena v kapljevini, in njene molekule, dokler je raztopina razredčena. Molekule lahko vsebujejo malo ali veliko atomov in imajo majhno ali veliko maso. Ne samo to, enačbi veljata tudi za večje, z mikroskopom vidne delce, ki lebdijo v kapljevini. Za molekule z relativno molekulsko maso 250 meri relaksacijska višina v raztopini 1 km, za delce, ki jih vidimo pod mikroskopom in ki imajo milijardokrat večjo maso, pa meri samo mikrometer, μm, milijonino metra ali tisočino milimetra.

Sedimentacijsko ravnovesje, to je ravnovesje vidnih delcev, ki lebdijo v kapljevini, je temeljito raziskal francoski fizik Jean-Baptiste Perrin s svojo skupino. Podrobno je izmeril, kako se z višino spreminja gostota kroglastih delcev, ki lebdijo v kapljevini, in določil Avogadrovo število. Čeprav so ga že prej določili nekateri drugi, je bil to okoli leta 1911 pommeben uspeh. Najprej je dolgo časa iskal snov, ki bi jo bilo mogoče oblikovati v zelo majhne kroglice. Koloidne raztopine se niso obnesle, ker so bili delci premajhni in preveč neenakomerni. Nazadnje sta se najbolje izkazali rastlinski smoli gumi-gut, ki jo pridobivajo v Kambodži in na Sri Lanki, in mastiks z nekaterih grških otokov. Perrin je smolo najprej raztopil v alkoholu in nato dobljeno rumeno raztopino močno razredčil z vodo. S centrifugiranjem je ločil delce od kapljevine. To je večkrat ponovil, dokler voda v okolici delcev ni bila popolnoma bistra. Delci so bili sicer kroglasti, a niso imeli enakega polmera. Zato je kapljevino večkrat za kratek čas centrifugiral in odbral delce, ki so se nakopičili daleč od osi in med katerimi so prevladovali delci z večjo maso. Z odbiranjem je po večmesečnem delu iz kilograma gumi-guta dobil nekaj desetin grama kroglic želene velikosti.



Slika 3. Lega mikroskopa in stolpca kapljevine pri opazovanju z navpično (a) in vodoravno osjo mikroskopa (b) ter delci smole v kapljevini v sedimentacijskem ravnovesju (c). Fotografijo je Perrin dobil z mikroskopom z vodoravno osjo (b).

Skrbno je premeril gostoto smole ρ in dobil, npr. 1,194 g/cm^3. Na več načinov je izmeril polmer kroglic r in zanj, npr. dobil 0,367 μm. Neposredno merjenje zaradi uklona ni bilo natančno. Natančneje je bilo mogoče izmeriti dolžino niza dotikajočih se kroglic in izračunati polmer. Z izmerjenim polmerom in gostoto je izračunal efektivno težo kroglice $\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho')g$, to je težo, zmanjšano za vzgon v kapljevini z gostoto ρ'.

Opazoval je z mikroskopom z navpično ali z vodoravno osjo. V prvem primeru je desetino milimetra globoko vdolbino v mikroskopskem stekelcu napolnil s kapljevino, v kateri so lebdeli kroglasti delci. S tem, da je mikroskop naravnal na določeno globino, je lahko opazoval delce v tej globini. Gostoto delcev je določil tako, da je delce v vidnem polju v določeni globini fotografiral in jih na fotografiji preštel. To je bilo mogoče le, če so bili delci dovolj veliki. Pri drugem načinu pa je z dodatno zaslonko močno zožil vidno polje, da je maloštevilne delce lahko zajel in preštel z enim pogledom.

Pri merjenju s kroglicami iz gumi-guta s polmerom 0,212 μm je v višini 5 μm, 35 μm, 65 μm in 95 μm v povprečju naštel po vrsti 100, 47, 22,6 in 12 delcev. Niz števil se približno ujema z geometrijskim zaporedjem: 100, 48, 23, 11,1. Iz teh podatkov je izračunal relaksacijsko višino 42,4 μm. Z znano efektivno težo je iz prve enačbe (4) izračunal Boltzmannovo konstanto k in nazadnje iz nje s plinsko konstanto še Avogadrovo število $N_A = R/k$. Pri nizu zelo skrbnih merjenj, v katerem je v celoti opazoval 17 tisoč delcev s polmerom 0,367 μm, je dobil za Avogadrovo število $6{,}8 \cdot 10^{26}$. Merili so z različno velikimi kroglicami, pri različnih temperaturah in z različnimi kapljevinami, vodo in bolj ali manj razredčenim glicerinom. Pri vseh merjenjih so dobili malo večji ali malo manjši rezultat. Danes Avogadrovo število $6{,}02 \cdot 10^{26}$ poznamo precej natančneje, tako da se utegne Perrinov rezultat zdeti dokaj nenatančen. Ob svojem času pa je bil zelo dragocen. Jean Perrin je leta 1926 za merjenja, ki jih je izvedel med letoma 1908 in 1911, dobil Nobelovo nagrado. V nadaljevanju bomo opisali še drugi del njegovih raziskovanj in pojasnili, zakaj so bila ta raziskovanja tako pomebna.

Ne čisto resno. Poučevalska fizikalna revija je objavila zgodbo o komisijskem izpitu iz fizike, na katerem je študent dobil vprašanje, kako bi določil višino stavbe, če ima občutljiv merilnik tlaka. Študent je navedel nekaj zanimivih predlogov. Merilnik bi obesil na vrvico, ga počasi spustil do tal in izmeril dolžino vrvice. Merilnik bi spustil, s stoparico izmeril čas, ko bi udaril po tleh, in iz časa izračunal višino padanja. Navsezadnje bi merilnik, ki najbrž ni poceni, dal hišniku v zameno za podatek o višini stavbe. Izpit je zdelal, češ da se bo v življenju dobro znašel. Pač ni bil študent fizike, ker se zadnja dva predloga ne skladata z zahtevo, da je treba po vaji vse naprave vrniti na staro mesto. Bralci pa bodo na vprašanje odgovorili tako, kot je spraševalec pričakoval. Na višino stavbe sklepamo po zmanjšanju zračnega tlaka, ko prenesemo merilnik od tal do vrha. Blizu nadmorske višine 0 se na 10 metrov višinske razlike tlak zmanjša za 120 $\mathrm{N/m^2}$.

Janez Strnad