PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **29** (2001/2002)
Številka 3
Strani 171–173

Žiga Ramšak in Janez Brank:

$\sqrt{(6+\sqrt{15})}$ JE NAJBOLJŠI PRIBLIŽEK ZA π

Ključne besede: matematika, iracionalna števila, približki, računalništvo, sintaksna drevesa.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/29/1478-Ramsak-Brank.pdf

$\sqrt{6+\sqrt{15}}$ JE NAJBOLJŠI PRIBLIŽEK ZA π

Če je približek π-ja lahko izražen le z naravnimi števili, največ dvema kvadratnima korenoma, seštevanjem in množenjem, je vseh možnih kandidatov (izrazov) za najboljši približek končno mnogo, pravzaprav celo zelo malo. Prvopodpisani sem domneval, da so možne samo naslednje štiri oblike izrazov z naštetimi omejitvami:

$$a+\sqrt{b},\ 0\le a\le 4,\ 0\le b\le 10 \tag{1}$$

$$a+\sqrt{b+\sqrt{c}},\ 0\le a\le 4,\ 0\le b\le 10,\ 0\le c\le 100 \tag{2}$$

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c},\ 0\le a\le 4,\ 0\le b,c\le 10 \tag{3}$$

$$a+(b+\sqrt{c})(d+\sqrt{e}),\ 0\le a,b,d\le 4,\ 0\le c,e\le 10 \tag{4}$$

Možnost (1) je sicer že zajeta v (2), v (3) in v (4), če so nekateri koeficienti enaki 0, vendar jo vseeno obravnavamo posebej. Množenje dveh korenov bi dalo spet en sam koren: $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{c}$, $c=ab$ (neko drugo naravno število). Podobno pa velja tudi za množenje naravnega števila in korena iz naravnega števila (kvadrat števila damo pod koren in dobimo izraz z enako vrednostjo).

Moj bivši sošolec in kolega na Fakulteti za računalnistvo in informatiko Janez Brank je mojo domnevo potrdil z dokazom, ki ga prilagam na koncu.

Vseh naštetih možnosti je, kljub temu, da se jih večina od π razlikuje za več kot 1, še vedno tako malo, da sem jih nekaj preveril kar s kalkulatorjem, ostale pa s programom v C-ju na osebnem računalniku.

Najboljši približek oblike (1) je $\sqrt{10}$, ki je od π (po absolutni vrednosti) oddaljen za manj kot 0.21.

Za obliko (4) so najboljši približki prav tako le $\sqrt{10}$ in njegove izpeljanke, npr. $\sqrt{2}\sqrt{5}$.

Oblika (2) da najboljši približek sploh in sicer $\sqrt{6+\sqrt{15}}$, ki je od π oddaljen za manj kot 0.00054.

Oblika (3) prispeva najzanimivejši približek, ki sploh ni slab: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je od π oddaljen za manj kot 0.005.

Glede na to, da sva, eden absolvent računalništva, drugi pa od nedavnega podiplomski študent, in da sva preverila kar vse možnosti, kar najbrž ni bil smisel naloge, meniva, da najina rešitev ne more biti nagrajena, četudi sva našla najboljši približek. Naloga se nama je zdela zanimiva, zato sva se tudi lotila reševanja.

Dokaz, da so oblike izrazov (1), (2), (3) in (4) res edine, ki ustrezajo zahtevam naloge:

Mislimo si sintaksna drevesa, v katerih se lahko pojavljajo operatorji $+$, $\cdot$ (oba binarna) in $\sqrt{\ }$ (unarni), v listih drevesa pa naravna števila.

1. Najprej opazimo, da lahko poljubno drevo, v katerem se pojavljata od operatorjev le $+$ in $\cdot$, poenostavimo kar v navadno naravno število.

2. Recimo zdaj, da se omejimo na drevesa z enim samim $\sqrt{\ }$-vozliščem. Ker je $\sqrt{\ }$ unarni operator, ima to vozlišče eno samo poddrevo. V njem lahko od operatorjev nastopata le $+$ in $\cdot$, tako da lahko (v skladu s točko 1) brez izgube za splošnost vzamemo, da je to poddrevo kar en sam list, v katerem je neko naravno število. Mislimo si zdaj pot od vrha drevesa do tistega edinega $\sqrt{\ }$-vozlišča. Poddrevesa, ki izhajajo iz te poti na levi in na desni, so ravno tako brez operatorjev $\sqrt{\ }$ in jih lahko poenostavimo v naravna števila. Če upoštevamo še komutativnost $+$ in $\cdot$, lahko drevo preoblikujemo tako, da gre tista veja do $\sqrt{\ }$-vozlišča ves čas na desno. Tako dobimo izraz $a_1 \circ (a_2 \circ (a_3 \circ \ldots \circ (a_n \circ \sqrt{b}) \ldots))$. Vsak $\circ$ predstavlja ali $+$ ali $\cdot$. Zdaj pa upoštevajmo, da lahko izrazu oblike $a + \sqrt{b}$ nekaj prištejemo ali pa ga z nečim (pozitivnim) pomnožimo, pa bo ostal enake oblike. Izraz $\sqrt{b}$ je take oblike (za a vzamemo število 0), ko pa mu zunanji operatorji še kaj prištejejo ali ga s čim pomnožijo, ostane enake oblike. Torej: drevo z enim samim $\sqrt{\ }$-vozliščem nujno predstavlja izraz oblike $a + \sqrt{b}$.

3. Zdaj pa si oglejmo drevesa z dvema $\sqrt{\ }$-vozliščema. Tu ločimo dve možnosti: ali je eno od $\sqrt{\ }$-vozlišč potomec drugega ali pa ne.

3.1. Recimo, da je eno od $\sqrt{\ }$-vozlišč (recimo mu B) potomec drugega (recimo mu A). Poddrevo pod A-jem v skladu s točko 2 predstavlja neki izraz oblike $b + \sqrt{c}$. Skupaj z A-jem imamo torej izraz $\sqrt{b + \sqrt{c}}$. Na veji, ki pelje od korena do A-ja, spet poenostavimo vsa stranska poddrevesa v naravna števila in dobljeno izrojeno drevo preuredimo tako, da se veja do A-ja ves čas premika na desno. Razmislek, kot pri točki 2, nam zdaj pove, da lahko izrazu oblike $a + \sqrt{d}$, za $d = \sqrt{b + \sqrt{c}}$, kaj prištejemo ali pa ga s čim pomnožimo, pa ostane enake oblike. Torej drevo, v katerem imamo dva gnezdena kvadratna korena, gotovo predstavlja izraz oblike $a + \sqrt{b + \sqrt{c}}$.

3.2. Recimo, da nobeno od $\sqrt{\ }$-vozlišč ni potomec drugega. Naj bosta A in B naši $\sqrt{\ }$-vozlišči, C pa njun najnižji skupni prednik. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da je A v levem poddrevesu C-ja, B pa v desnem (v C-ju seveda mora biti binarni operator, saj smo oba korena že porabili, A in B pa tudi ne moreta biti v istem C-jevem poddrevesu, saj