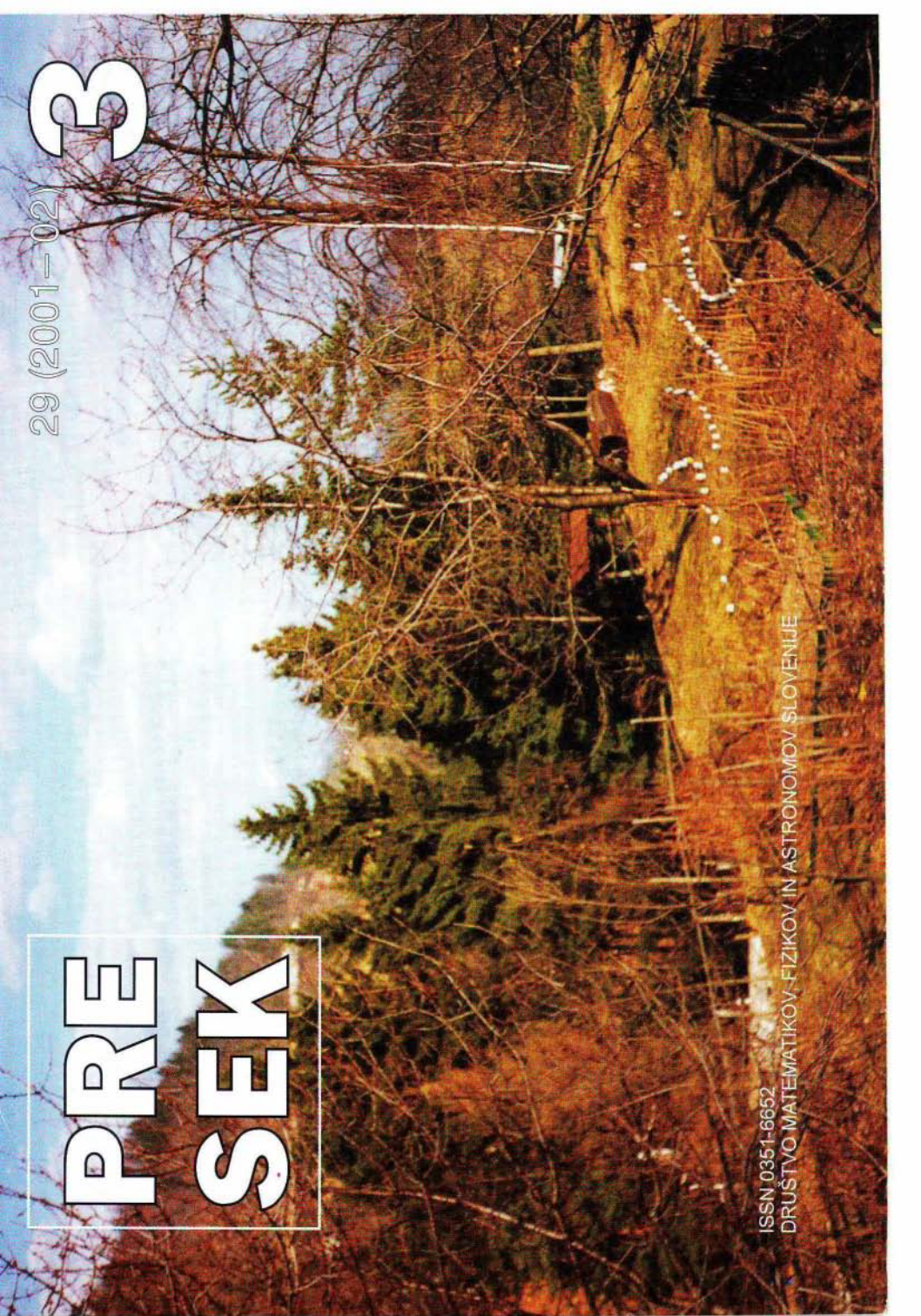


29 (2001-02)

3

# PRE SEK

ISSN 0351-6652  
DRUŠTVO MATEMATIKOV-FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



## KAKO DO ENAČBE SENCE?

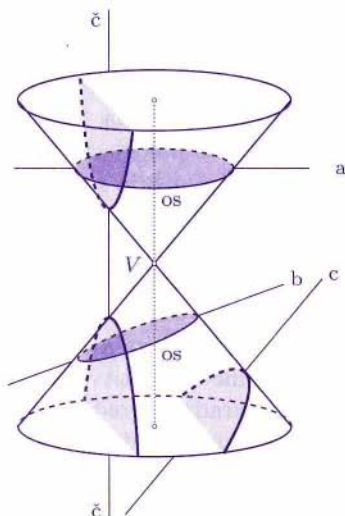
Zadajmo si nalogo, da želimo ugotoviti, po kakšni krivulji se premika konec sence, ki jo vrh navpične in od Sonca osvetljene palice med dnevom meče na vodoravno ravnino. To je precej zahtevna naloga. Da bi jo rešili, je treba nekaj vedeti o vektorjih in o sekanju ravnine in pokončnega dvojnega krožnega stožca.

S sekanjem ravnine in plašča pokončnega dvojnega krožnega stožca namreč dobimo kot presek krivulje drugega reda, imenovane stožnice (krožnica, elipsa, parabola, hiperbola), to pa so prav tiste krivulje, ki jih ob sončnem vremenu opisujejo konci senc navpično postavljenih predmetov v različnih krajih na Zemlji (slika 1).

Slika 1. Sekanje ravnine in plašča pokončnega dvojnega krožnega stožca. Za presek dobimo:

- a – krožnico (ravnina seka dvojni stožec pravokotno na os),
- b – elipso (ravnina seka dvojni stožec poševno na os),
- c – parabolo (ravnina seka dvojni stožec vzporedno s stranico),
- č – hiperbolo (ravnina seka dvojni stožec vzporedno z osjo).

Opomba. Če ravnina seka dvojni stožec skozi vrh  $V$ , dobimo za presek sekajoči se premici.



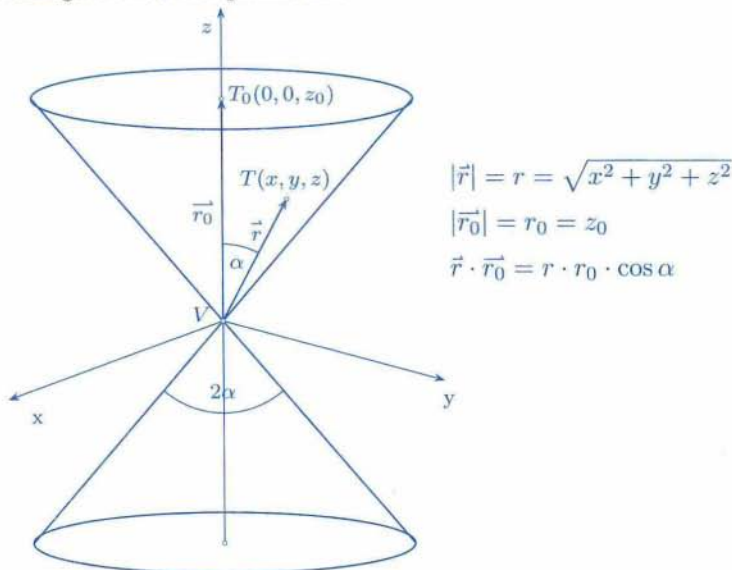
Vpeljimo prostorski pravokotni koordinatni sistem z izhodiščem v vrhu  $V$  dvojnega pokončnega krožnega stožca z odprtino  $2\alpha$ , kar je kot ob vrhu osnega preseka stožca (slika 2).

Najprej nas zanima enačba plašča pokončnega dvojnega stožca. Izpeljemo jo takole: Naj v poljubno točko  $T(x, y, z)$  plašča stožca kaže krajevni vektor  $\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , krajevni vektor  $\mathbf{r}_0 = (0, 0, z_0)$  pa naj leži v osi stožca in naj kaže v pozitivno smer osi  $z$  (navpično navzgor). Ko zavzamejo komponente  $x, y, z$  vektorja  $\mathbf{r}$  vse vrednosti od  $-\infty$  do  $+\infty$ , konica vektorja  $\mathbf{r}$  opiše ves plašč pokončnega dvojnega stožca. Njegovo enačbo dobimo s skalarnim produktom vektorjev  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{r}_0$ , torej  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 = (x, y, z) \cdot (0, 0, z_0) = r \cdot r_0 \cos \alpha$ . Velja  $zz_0 = rr_0 \cos \alpha$ . Ker je  $r_0 = z_0$ ,

sledi  $z = r \cos \alpha$  oz.  $z^2 = r^2 \cos^2 \alpha$  ali  $z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 \alpha$ . To enačbo preoblikujemo najprej v  $z^2(1 - \cos^2 \alpha) = (x^2 + y^2) \cos^2 \alpha$  in končno v

$$z^2 = \frac{1}{\tan^2 \alpha} (x^2 + y^2).$$

Tako smo zapisali enačbo ploskve, to je enačbo plašča pokončnega dvojnega krožnega stožca z odprtino  $2\alpha$ .



Slika 2. K izpeljavi enačbe plašča dvojnega pokončnega krožnega stožca.

Naj ima ravnina, ki je vzporedna z ravnino  $xy$ , enačbo  $z = v$  ( $v$  naj pomeni višino, ki je konstantna). Presek te ravnine in plašča dvojnega stožca dobimo z rešitvijo sistema enačb  $z^2 = \frac{1}{\tan^2 \alpha} (x^2 + y^2)$  in  $z = v$ . V enačbo ploskve preprosto vstavimo  $v$  namesto  $z$  in dobimo  $v^2 \tan^2 \alpha = x^2 + y^2$  ali  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , če je  $\rho = v \tan \alpha$ . Presek je krožnica s polmerom  $\rho$ . Podobno bi lahko dokazali, da so preseki dvojnega stožca z drugače potekajočimi ravninami druge stožnice (elipsa, parabola in hiperbola), kar pa ni naš namen.

V naših krajih vzide vsak dan Sonce zjutraj na vzhodnem delu obzorja, je najvišje opoldne na jugu in zaide zvečer za zahodni del obzorja. Navidezno dnevno gibanje Sonca poteka (okrog nebesne osi) po nebesnem vzporedniku z deklinacijo  $\delta$ , kakor imenujemo kotni odmik nebesne točke od nebesnega ekvatorja. Deklinacija Sonca se med letom spreminja. Ko je

njegova deklinacija  $\delta = 0$  (enakonočje), leži Sonce na nebesnem ekvatorju, za  $\delta > 0$  je Sonce nad nebesnim ekvatorjem na severni nebesni poluti (od spomladanskega do jesenskega enakonočja), za  $\delta < 0$  pa pod ekvatorjem na južni nebesni polkrogli (od jesenskega do spomladanskega enakonočja). Sonce se torej vsak dan navidezno giblje po plašču dvojnega krožnega stožca, katerega os je usmerjena v severni nebesni pol  $P$  (tik ob njem leži zvezda Severnica), odprtina stožca  $2\alpha$  pa je  $2(90^\circ - \delta)$ , kar nazorno kaže slika 3.

V vrh navpične palice (stožca) z višino  $v$  postavimo izhodišče prostorskega koordinatnega sistema. Os  $x$  usmerimo proti severu  $N$ , os  $y$  proti zahodu  $W$ , os  $z$  pa navpično navzgor proti zenitu  $Z$ . Severni nebesni pol  $P$  leži v ravnini  $NSZ$ , višinski kot severnega nebesnega pola, to je kot med vodoravno ravnino in smerjo proti severnemu nebesnemu polu, pa je po definiciji enak zemljepisni širini  $\varphi$  opazovališča na severni zemeljski poluti, torej  $\sphericalangle NOP = \varphi$ .

Naj določenega dne krajevni vektor  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  kaže v Sonce, ki je v določeni točki  $R$  na plašču dvojnega stožca, vektor  $\mathbf{r}_0 = (x_0, 0, z_0)$  pa tako in tako kaže v pol  $P$ . Skalarni produkt teh dveh vektorjev je  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 = r \cdot r_0 \cos(90^\circ - \delta)$ . Sledi  $(x, y, z) \cdot (x_0, 0, z_0) = r \cdot r_0 \sin \delta$  oz.  $xx_0 + zz_0 = rr_0 \sin \delta$ . Nadalje je  $x \frac{x_0}{r_0} + z \frac{z_0}{r_0} = r \sin \delta$  ali  $x \cos \varphi + z \sin \varphi = r \sin \delta$ . Zadnjo enačbo kvadriramo, upoštevamo  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  in dobimo

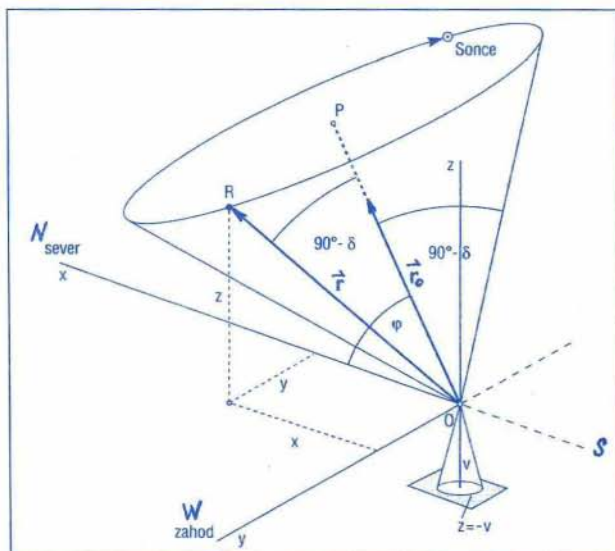
$$(x \cos \varphi + z \sin \varphi)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta. \quad (1)$$

Pravkar smo zapisali enačbo plašča dvojnega stožca, po katerem se Sonce navidezno giblje med letom. Na splošno za vse kraje na Zemlji velja  $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$ , za vse datume med letom pa  $-23,5^\circ \leq \delta \leq +23,5^\circ$  (glej prispevek *Deklinacija Sonca*, Presek **27** (1999/2000), 22).

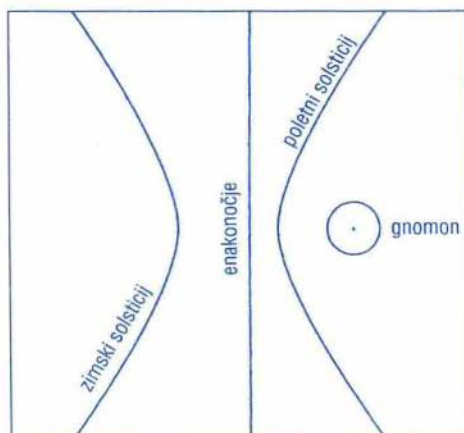
Vodoravna ravnina, na kateri opazujemo senco, ima enačbo  $z = -v$ . Presek te ravnine in plašča dvojnega stožca z enačbo (1) je stožnica, ki prikazuje, kako se konec sence od Sonca osvetljene navpične palice (pokončnega stožca) določenega dne premika po vodoravni ravnini. Da dobimo enačbo stožnice, v enačbo (1) vstavimo  $z = -v$ . Dobimo

$$(x \cos \varphi - v \sin \varphi)^2 = (x^2 + y^2 + v^2) \sin^2 \delta.$$

To pa je splošna oblika enačbe iskane stožnice, ki jo v določenem času ( $\delta = \delta(t)$ ) in kraju z zemljepisno širino  $\varphi$  na vodoravni ravnini popiše konec sence. Za vsak par vrednosti  $\varphi$  in  $\delta$  (glej omejitve spredaj) dobimo drugačno stožnico.



Slika 3. K izpeljavi enačbe plašča dvojnega krožnega stožca, katerega os je usmerjena proti severnemu nebesnemu polu. Presek tega plašča in vodoravne ravnine, ki gre skozi nožišče navpične palice (osnovno ploskev stožca), je v splošnem stožnica.



Slika 4. Senca navpične palice (gnomona) ob treh značilnih datumih za naše kraje – teorija.

Praksa: Naslovnica prikazuje moja opazovanja sence, ki sem jih opravil na ravninici pred domačo češnjo na Gorenjskem in so trajala več kot poldrugo leto. Prikazano je premikanje konca sence navpične palice (z leve) ob božiču, sredi oktobra, ob enakonočju, ob kresu.

Na prvi pogled se zdi enačba sence precej zapletena, v resnici pa ni, posebno če imamo računalnik in primerno programsko orodje, npr. Derive ali Origin. Enačbo sence (eksplicitno obliko funkcije) vnesemo v računalnik, odtipkamo določeno vrednost za  $\varphi$  (zemljepisna širina kraja)

in določeno vrednost za  $\delta$  (deklinacija Sonca za določen dan v letu) ter senco lahko opazujemo na zaslonu računalnika.

Za kraje v Sloveniji lahko za zemljepisno širino vnesemo kar  $45^\circ$  ali  $46^\circ$ , za druge kraje pa podatek za zemljepisno širino poiščemo na zemljevidu. Podatek za deklinacijo Sonca dobimo v vsakoletnih astronomskih efemeridah (koledarjih), pri nas v publikaciji *Naše nebo* (DMFA Slovenije).

Za zaključek si oglejmo (brez računalnika) tri tipične primere premikanja sence.

- i) Senca na severnem zemeljskem polu

Tu velja  $\varphi = 90^\circ$  ( $\cos \varphi = 0$ ,  $\sin \varphi = 1$ ). Enačba sence dobi obliko  $v^2 = (x^2 + y^2 + v^2) \sin^2 \delta$  ali  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , kjer je  $\rho = v \cot \delta$  polmer krožnice. Ob kresu ( $\delta = 23,5^\circ$ ) se na severnem zemeljskem polu konec sence premika po krožnici s polmerom  $\rho = v \cot 23,5^\circ$ . Ob enakonočju ( $\delta = 0$ ) pa sence ni (zakaj že?).

- ii) Senca na ekvatorju

Tu je  $\varphi = 0$  ( $\cos \varphi = 1$ ,  $\sin \varphi = 0$ ). Enačbo preoblikujemo v  $\frac{x^2}{v^2 \tan^2 \delta} - \frac{y^2}{v^2} = 1$ , kar je enačba hiperbole. Konec sence se premika po hiperboli vse dni v letu, razen ob enakonočju, ko je  $x = 0$ , torej os  $y$  oz. premica, ki gre skozi podnožišče palice v smeri od zahoda proti vzhodu.

- iii) Senca pri nas

Je v splošnem hiperbola (izpelji enačbo), razen ob enakonočju, ko je premica z enačbo  $x = v \tan \varphi$  (slika 4 in fotografija na naslovnici).

## Vaje

Po kakšni krivulji se premika konec sence, ki jo od Sonca obsijana navpična palica z višino  $v$  meče na vodoravna tla v krajih na:

- severnem zemeljskem polarniku ( $\varphi = 66,5^\circ$ )
  - ob kresu
  - ob enakonočju
- severnem zemeljskem povratniku ( $\varphi = 23,5^\circ$ )
  - ob kresu
  - ob enakonočju
- geografskem vzporedniku s  $\varphi = 80^\circ$ 
  - ob kresu
  - ob božiču

Poskušaj senco vsakič računalniško natisniti.

Marijan Prosen

Rešitve vaj so na str. 173.

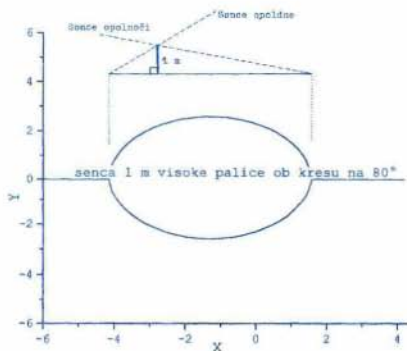
smo rekli, naj bo C njun najnižji skupni prednik). Levo C-jevo poddrevo je torej drevo z enim samim  $\sqrt{\quad}$ -vozliščem in zato po točki 2 predstavlja izraz oblike  $a + \sqrt{b}$ . Ravno tako pa desno C-jevo poddrevo predstavlja nekaj, oblike  $c + \sqrt{d}$ . Če je operator v C-ju  $+$ , predstavlja poddrevo s korenem C izraz oblike  $a + \sqrt{b + \sqrt{c}}$  za neke nove konstante a, b in c. Če pa je v C-ju operator  $\cdot$ , predstavlja poddrevo s korenem C izraz oblike  $(a + \sqrt{b})(c + \sqrt{d})$ . Preprost induktivni razmislek pokaže, da se s prištevanji in množenji, ki se dogajajo na poti od korena do C, v prvem primeru ohranja oblika  $a + \sqrt{b + \sqrt{c}}$ , v drugem primeru pa oblika  $a + (b + \sqrt{c})(d + \sqrt{e})$ .

Skratka, dobili smo ravno oblike izrazov z začetka razmišljanja.

*Žiga Ramšak, Janez Brank*

## KAKO DO ENAČBE SENCE – Rešitve vaj s str. 148

1. Upoštevaš  $\varphi = (90^\circ - \delta)$ , ker je  $\delta = 23,5^\circ$ . Ob kresu se konec sence premika po paraboli z enačbo  $y^2 = v^2(\cot^2\delta - 1) - 2v \cot\delta \cdot x$ , ob enakonočju pa po premici  $x = v \tan\varphi$ .
2. Ob kresu po hiperboli, ob enakonočju po premici.
3. Ob kresu po elipsi (skica), ob božiču sence ni, saj je tam tema (polarna noč).



Natisnjeno s programskim orodjem Origin. Če npr. želimo ugotoviti, kje znotraj elipse leži navpična palica, moramo upoštevati, da je Sonce ves čas (dan) nad obzorjem in da je opoldne najvišje na jugu, opolnoči pa najnižje na severu.