

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 29 (2001/2002)

Številka 3

Strani 134-139

Peter Legiša:

RISANJE KOCK IN KVADROV

Ključne besede: matematika, geometrija, kvader, projekcija.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/29/1478-Legisa.pdf>

© 2001 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

RISANJE KOCKE IN KVADROV

Z vektorskim računom se lahko lotimo naslednje pomembne naloge tehničnega risanja:

Narišimo pravokotno projekcijo kocke tako, da bodo dolžine projekcij robov v razmerju $1 : 1 : \frac{1}{2}$.

Rešitev.

Kocko $ABCD A' B' C' D'$ z robom dolžine 1 bomo projicirali na ravnino xy . Kocko lahko togo premaknemo tako, da bo oglišče A v izhodišču, pravokotni projekciji $A_1 B_1$ ter $A_1 D_1$ robov AB in AD pa bosta ležali simetrično glede na os y (sliki 1 in 2).

Po predpostavki privzamemo $|A_1 B_1| = |A_1 D_1|$. Zato lahko zapišemo

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = (a_1, a_2, 0)$$

$$\overrightarrow{A_1 D_1} = (-a_1, a_2, 0).$$

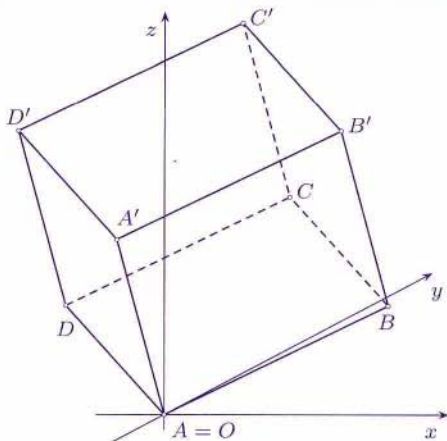
Od tod sledi $\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\overrightarrow{AD} = (-a_1, a_2, b_3)$. Ker je $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$, je seveda

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= \\ &= (-a_1)^2 + a_2^2 + b_3^2 = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

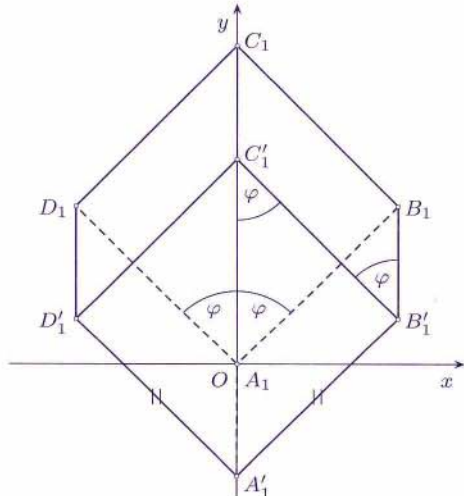
in od tod $a_3 = \pm b_3$. Privzamemo lahko, da je $a_3 = b_3 > 0$ (slika 1). Torej je

$$\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\overrightarrow{AD} = (-a_1, a_2, a_3).$$



Slika 1.



Slika 2.

Vektorja \overline{AB} in \overline{AD} sta pravokotna, zato je

$$-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0. \quad (2)$$

Iz (1) in (2) sledi

$$2a_1^2 = 1,$$

in po sliki 2 je $a_1 > 0$, zato

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_2^2 + a_3^2 = \frac{1}{2}.$$

Vektor $\overline{AA'} = (c_1, c_2, c_3)$ je pravokoten na \overline{AB} in \overline{AD} . Torej velja

$$\overline{AA'} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$$

in

$$\overline{AA'} \cdot \overline{AD} = -\frac{1}{\sqrt{2}}c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0.$$

Odštejmo obe enačbi, pa dobimo $c_1 = 0$ in

$$a_2c_2 + a_3c_3 = 0,$$

torej

$$c_3 = -\frac{a_2c_2}{a_3}. \quad (4)$$

Od tod sledi

$$\overline{AA'} = (0, c_2, c_3).$$

Ker je $|AA'| = 1$, je

$$c_2^2 + c_3^2 = 1. \quad (5)$$

Projekcija vektorja $\overline{AA'}$ na ravnino xy je

$$\overline{AA'} = (0, c_2, 0).$$

Po (3), (4) in (5) je

$$1 = c_2^2 + c_3^2 = c_2^2 + \frac{a_2^2 c_2^2}{a_3^2} = \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_3^2} c_2^2 = \frac{1}{2a_3^2} c_2^2.$$

Tako je $c_2^2 = 2a_3^2$. Po sliki 1 je $c_2 < 0$ in $a_3 > 0$, zato

$$c_2 = -\sqrt{2}a_3. \quad (6)$$

Začetna predpostavka o razmerjih dolžin projekcij pravi, da je

$$|A_1 A_1'| = \frac{1}{2} |A_1 B_1|$$

ali

$$|c_2| = \frac{1}{2} |(a_1, a_2, 0)|,$$

torej po (1)

$$4c_2^2 = a_1^2 + a_2^2 = 1 - a_3^2.$$

Toda po (6) je $4c_2^2 = 8a_3^2$ in od tod

$$8a_3^2 = 1 - a_3^2.$$

Vidimo, da je $a_3 = \frac{1}{3}$, saj je $a_3 > 0$. Iz (3) dobimo

$$a_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18}.$$

Ker je $a_2 > 0$, je

$$a_2 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

in

$$c_2 = -\sqrt{2}a_3 = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Od tod sledi

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{2}}, 0 \right)$$

in

$$\overline{A'_1A_1} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right).$$

Izračunamo

$$g = |A_1B_1| = 2|A'_1A_1| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \doteq 0,943.$$

Točki B_1 in D_1 ležita simetrično glede na os y (slika 2), zato je

$$|B_1D_1| = 2a_1 = \sqrt{2}.$$

Od tod sledi

$$|B_1D_1| = \frac{3}{2}g$$

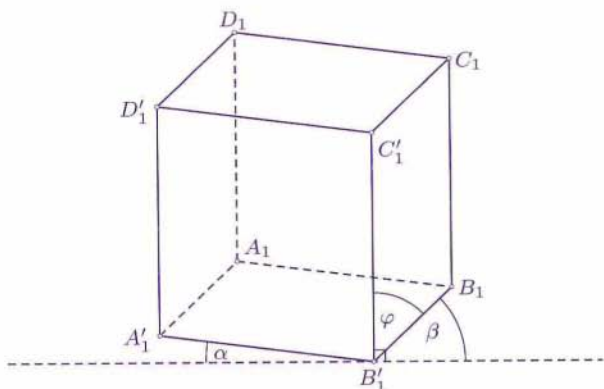
in

$$\sin \varphi = \frac{a_1}{|A_1B_1|} = \frac{3}{4}$$

ter

$$\varphi \doteq 48,59^\circ.$$

Izračunamo kot $\sphericalangle A'_1B'_1C'_1 = 180^\circ - 2\varphi \doteq 82,82^\circ = 90^\circ - 7^\circ 18'$. Obrnimo zdaj sliko tako, da bo daljica $A'_1D'_1$ navpična. Dobimo sliko 3, na kateri je črtkana črta vodoravna.

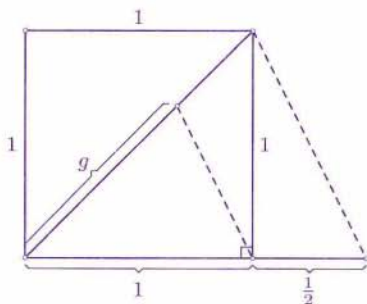


Slika 3.

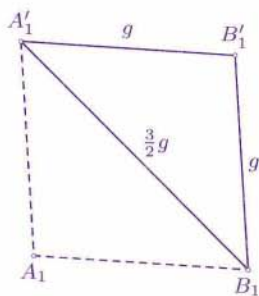
Tu kot α znaša približno $7,18^\circ$, kot β pa je $90^\circ - \varphi \doteq 41,41^\circ$. Na ta način projiciramo tudi kvadre. Razložili smo enega standardnih načinov upodabljanja togih teles.

Kot sem prebral v nemškem priročniku elementarne matematike [1], so si tehnični risarji včasih (po dogovoru) privoščili malce ohlapnosti. Vzeli so $|A_1B_1| = |AB|$ in $|A_1A'_1| = \frac{1}{2}|AA'_1|$. To je pomenilo kakih 6% napake v merilu. Za kot α so vzeli 7° , za β pa 42° . (Mimogrede, v tem priročniku piše, da je $\alpha = 7^\circ 10'$, čeprav je prava vrednost bližje $7^\circ 11'$.) Danes, v dobi računalniške grafike, take poenostavitve niso več potrebne.

Te ohlapnosti so tudi sicer odveč – vsaj za matematike. Ogljšča kocke bomo označili standardno. Narišemo kvadrat s stranico 1 in vzamemo $\frac{2}{3}$ njegove diagonale (slika 4). To razdaljo g narišemo navpično kot projekcijo stranice BB' .

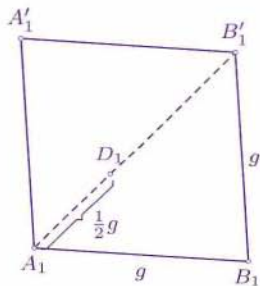


Slika 4.

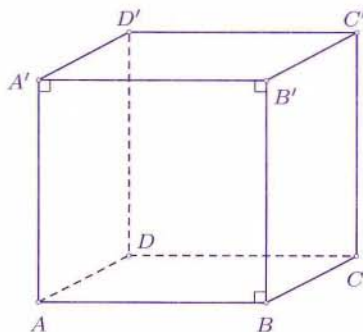


Slika 5.

Nato narišemo romb $A_1B_1B'_1A'_1$ s stranico g in z diagonalo $\frac{3}{2}g = \sqrt{2}$ (slika 5). Zvežemo A_1 in B'_1 ter od A_1 odmerimo $\frac{1}{2}g$ (slika 6), da dobimo D_1 . Preostanek konstrukcije je jasen.



Slika 6.



Slika 7.

Bolj enostavno kocko upodabljam z vzporedno projekcijo. Projiciramo na ravnino Σ kvadrata $DCC'D'$ (slika 7), in sicer vzdolž premice, ki ni niti vzporedna niti pravokotna na Σ . Pri tem se tudi kvadrat $ABB'A'$ upodobi kot skladen kvadrat, preostale stranske ploskve pa kot paralelogrami. Tako projekcijo bi v vsakdanjem življenju lahko videli kot senco. To se zgodi bolj redko. Zato je pravokotna projekcija bolj naravna – zahteva pa več dela.

Literatura

1. H. Krenl, K. Kulke, H. Pester, R. Schroedter: *Lehrgang der Elementarmathematik*, 20. Auflage, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig 1988.

Peter Legiša

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU 1996 – 2001

Člani Komisije za tekmovanje *Evropski matematični kenguru* smo pripravili zbirko nalog s tega tekmovanja, v kateri so zajete tekmovalne naloge od leta 1996 do leta 2001. V tekmovanje se lahko vključujejo učenci od drugega razreda osnovne šole dalje in dijaki vseh srednjih šol. V zbirki je velika večina nalog tudi rešenih in ne le opremljenih s pravilnim odgovorom, kar je dobrodošlo zlasti za samostojno pripravo na tekmovanje oziroma lažjo pripravo na dodatni pouk ali matematični krožek. V dodatku so objavljene naloge izbirnega tipa, ki so jih reševali dijaki na treh predhodnih šolskih tekmovanjih in so prav tako opremljene z rešitvami. Knjiga formata B5 je s preko 250 stranmi primerno gradivo za tiste, ki se uvajajo v matematična tekmovanja, in za tiste, ki želijo ohranjati svojo tekmovalno "formo". Zbirko lahko kupite oziroma naročite pri DMFA – založništvo, Jadranska cesta 19, Ljubljana, tel. (01) 4232-460.



Darjo Felda