

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 28 (2000/2001)

Številka 6

Strani 354-358

Tim Vidmar in Andrej Likar:

## ZMAGOVALEC DOBI (SKORAJ) VSE

Ključne besede: računalništvo, matematično modeliranje, ekonometrične meritve, prerazporejanja v ekonomiji, Lorentzova krivulja, fizika, Maxellova porazdelitev.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/28/1458-Vidmar-Likar.pdf>

© 2001 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

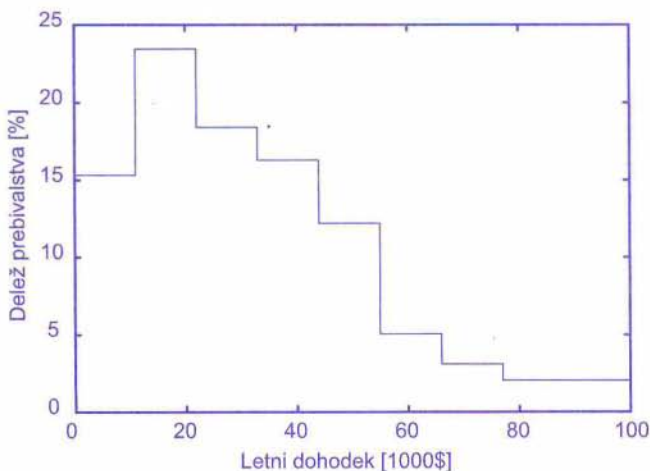
© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## ZMAGOVALEC DOBI (SKORAJ) VSE

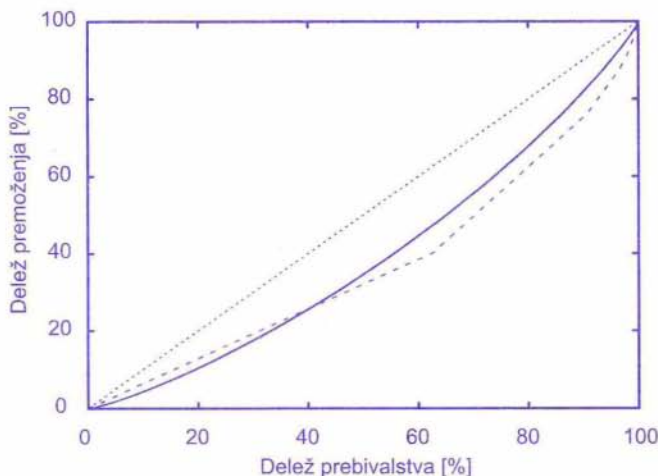
Pred kratkim mi je znanec, ki študira na ugledni univerzi onstran velike luže, dejal, da je sicer res, da v mogočni državi, kjer se univerza nahaja, lahko vsakdo postane milijonar, da pa moraš vsak dolar, za katerega si premožnejši, tako rekoč ukrasti nekomu drugemu. To me je spomnilo na staro ekonomsko resnico, katere oče je Michel de Montaigne in ki jo J. K. Galbraith, znani harvardski profesor in popularizator ekonomske znanosti, v svoji knjigi "Almost Everyone's Economics" podaja kot "Every gain (profit) is someone else's loss". Če pozabimo na naraščanje skupnega bogastva nekega naroda, je vse ostalo, kar v ekonomiji poteka, pravzaprav le prerezporejanje. Predpostavka, da je ekonomija igra z ničelno vsoto, je seveda močno pomanjkljiva, kot bomo videli, pa lahko s takim modelom kljub vsemu poustvarimo razmere v porazdelitvi premoženja in dohodka, kakršne nam dajo ekonometrične meritve.

Posledica prerazporejanja v ekonomiji so namreč neenakosti med člani družbe. Ekonomisti prikažejo porazdelitev premoženja ali dohodkov tako, da zberejo prebivalce v nekaj razredov in narišejo histogram, kakršnega vidimo na sliki 1. Ta prikazuje podatke o letnem dohodku na prebivalca za prebivalstvo ZDA za leto 1985. Povzeli smo jih po znanem učbeniku ekonomije profesorja Samuelsona z univerze MIT, Nobelovega nagrajenca za ekonomijo.



Slika 1. Histogram s podatki o letnem dohodku na prebivalca za prebivalstvo ZDA (v tisočih dolarjev). Povzeto po učbeniku ekonomije Samuelsona in Nordhaus.

Tak histogram lahko pretvorimo tudi v krivuljo, ki jo ekonomisti imenujejo Lorenzova in pri kateri nanašamo na absciso kumulativni delež prebivalstva, na ordinato pa ustrezni kumulativni delež premoženja ali dohodka (oboje v odstotkih). Primer takih krivulj vidimo na sliki 2. Na abscisni osi Lorenzove krivulje je prebivalstvo razporejeno, od tistih z najnižjimi proti tistim z višjimi dohodki. Če v družbi vlada popolna enakost, je Lorenzova krivulja premica (pikčasta krivulja na sliki 2), sicer pa se usloči navzdol, saj ima majhen del prebivalstva v lasti velik del bogastva. Bolj ko je krivulja usločena, bolj razslojena je družba. Tako nekoliko zlomljena črtkana krivulja na sliki 2 ustreza podatkom o davčnih zavezancih za Slovenijo za leto 1999, kot nam jih je posredovala Davčna uprava Republike Slovenije. Podatki so nekoliko skopi (le šest davčnih razredov) in verjetno ne ustrezajo povsem dejanskim premoženjskim razmeram v družbi, saj je daleč največ zavezancev pristalo v najnižjem davčnem razredu.



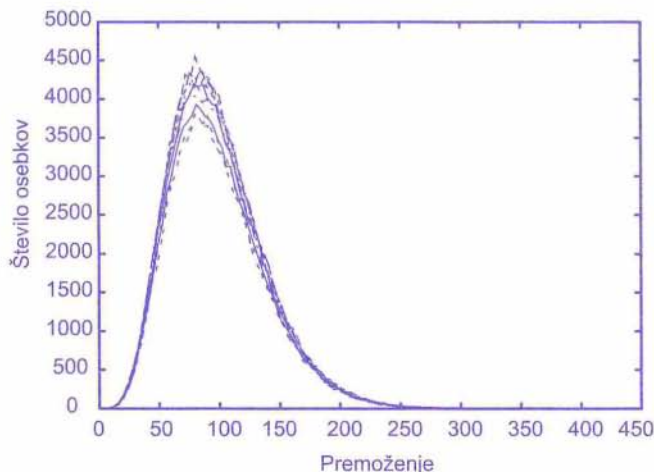
Slika 2. Lorenzova krivulja dobljena s simulacijo. Na absciso je nanešen kumulativni delež prebivalstva, na ordinato pa ustrezni kumulativni delež premoženja (oboje v odstotkih). S pikčasto črto je prikazana Lorenzova krivulja za povsem enakomerno porazdelitev premoženja v družbi, s črtkano pa krivulja ki ustreza podatkom Davčne uprave Republike Slovenije za dohodninske zavezance za leto 1999.

Zanimalo nas je, ali morda lahko najdemo preprost mehanizem, ki bi tako porazdelitev pojasnil in ki bi temeljil na prerazporejanju premoženja v družbi. Tako smo predpostavili, da vsi osebki v populaciji prično z enakim premoženjem in ga nato skušajo odvzeti ostalim. Poskus prilasčanja premoženja vedno poteka med dvema naključno izbranimi osebkom, pri

čemer osebka izberemo neodvisno in ima vsak osebek enako verjetnost biti izbran. Prvi osebek odvzame drugemu del njegovega premoženja, ki se slučajno spreminja med nič in npr. dvajset odstotki trenutnega premoženja izgubarja. V teh mejah izberemo vsak odstotek odvzetega premoženja z enako verjetnostjo in neodvisno od izbire obeh osebkov. O tem, kateri osebek je 'prvi', kateri 'drugi' in koliko premoženja bo prvi odvil drugemu, torej odloča slučaj.

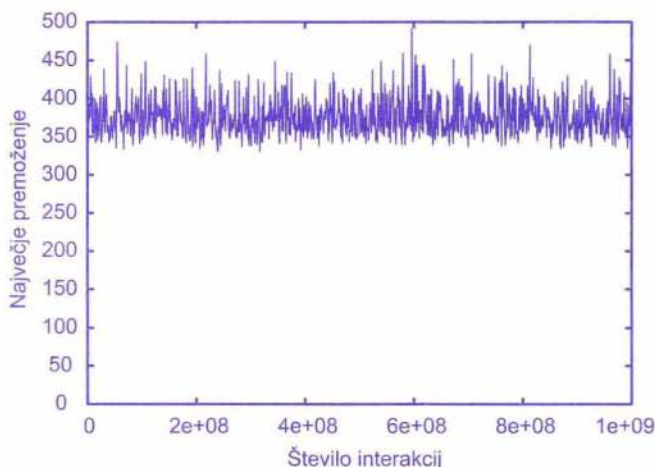
Za tak ekonomski model lahko zapišemo enačbe, ki povedo, kako se porazdelitev premoženja med osebki spreminja z naraščajočim številom interakcij. Pri posebno lepih robnih in začetnih pogojih najdemo tudi analitične rešitve prirejenih enačb. Za splošnejšo obravnavo pa se raje zatečemo k računalniški simulaciji, ki jo brez težav prelijemo v program.

Tako simulacijo smo pognali s sto tisoč osebki, od katerih je vsak na začetku razpolagal s 100 enotami premoženja. Na sliki 3 vidimo porazdelitev premoženja po sto milijonih, dvesto milijonih, tristo milijonih itd. poskusov prilaščanja med osebki. Hitro se vzpostavi stacionarna porazdelitev, ki nekoliko opleta okrog svoje srednje vrednosti. Kvalitativno se dobro ujema s histogramom na sliki 1 in je močno nesimetrična ter ima rep, ki se vleče proti visokim dohodkom. Lorenzova krivulja (slika 2), ki ustreza tej porazdelitvi, kaže usločenost, značilno za nekatere razvite družbe, kot so ZDA.



Slika 3. Porazdelitev po premoženju med osebki, ki nastopajo v simulaciji, po sto milijonih, dvesto milijonih, tristo milijonih itd. poskusov prilaščanja premoženja med osebki. Vsak osebek je v začetku razpolagal s 100 enotami premoženja.

Da je porazdelitev v povprečju res stacionarna, vidimo, če si ogledamo odvisnost največjega premoženja v populaciji od naraščajočega števila interakcij med osebkami (slika 4). Ta se sprva hitro povzpne na vrednost približno 370-tih enot in nato opleta okoli te srednje vrednosti. Še en "dokaz" stabilnosti sistema in postopka dobimo, če v začetku postavimo premoženja vseh osebkov razen enega na nič, izbrani srečnež pa poseduje milijon enot. Dobljene porazdelitve premoženja, Lorenzove krivulje in povprečni potek največje vrednosti premoženja se ne razlikujejo od tistih, ki jih da enakomerna začetna porazdelitev bogastva.



Slika 4. Odvisnost največjega premoženja v populaciji od naraščajočega števila interakcij med osebkami. Vsak osebek je v začetku razpolagal s 100 enotami premoženja.

Lorenzove krivulje so manj usločene za družbe z uveljavljenimi korekcijskimi socialnimi mehanizmi, kot so na primer skandinavske države. Zanimivo je, da s spreminjanjem največjega deleža premoženja, ki ga lahko sposobnejši odvzame šibkejšemu pri posamezni interakciji, zares dobimo različno nesimetrične porazdelitve bogastva in ustrezno različno usločene Lorenzove krivulje ter seveda različne povprečne in največje vrednosti premoženja.

Če sedaj odpravimo omejitev, da je vsota premoženja v ekonomiji konstantna, se sicer spremenijo največje, najmanjše in povprečne vrednosti premoženja, toda stopnja neenakosti v družbi ostane enaka. Tako lahko

ob vsakem poskusu odvzema premoženja med dvema osebkoma enega od njiju ali pa nekoga tretjega nagradimo s povečanjem premoženja za določen odstotek. Ekonomija kot celota raste, toda razmerja med osebki se ne porušijo in Lorenzove krivulje ohranijo obliko.

Simulacija, ki smo jo predstavili, je preprost primer pristopa k reševanju problemov iz realnega sveta, ki mu pravimo matematično modeliranje. V fiziki je še posebej priljubljena njegova podzvrst, pri kateri zgradimo model iz "prvih principov" – osnovnih zakonitosti, ki veljajo za sestavne dele strukture, ki jo opazujemo, in ne za strukturo kot celoto. Zakonitosti slednje nato dobimo kot rezultat interakcij med njenimi sestavnimi deli. Te zakonitosti so lahko močno drugačne, ali celo v nasprotju s pravili, ki veljajo za gradnike. Klasičen primer takega pristopa v fiziki je kinetična teorija plinov, pri kateri med drugim izpeljemo enačbo idealnega plina iz Newtonovih zakonov gibanja.

V resnici porazdelitev osebkov po prihodku na sliki 3 spominja na Maxwelllovo porazdelitev molekul plina po hitrosti. Lahko si predstavljamo, da trku dveh molekul in prerazporeditvi njunih gibalnih količin ustreza slučajni mehanizem prilaščanja premoženja med dvema osebkoma. Tako potrebujemo za osnovni model neenakosti premoženja v družbi le sodelovanje med osebki in naključnost izidov njihovih srečanj. Tako kot ena izmed molekul plina nujno pristane v repu Maxwelllove porazdelitve, eden izmed osebkov našega modela pač obogati. Ali kot je dejal junak dela "Good as Gold", znanega pisatelja Josepha Hellerja, avtorja uspešnice "Kavelj 22", ko je razmišljal o tem, kdo v deželi pogumnih, ki je dom mogočnih, uspe: "All it takes is dumb luck."<sup>1</sup>

V zadnjem času je način razvoja modelov, kakršnega smo opisali, vse bolj priljubljen tudi pri raziskovanju kompleksnih sistemov v družboslovnih znanostih, kjer ga imajo nekateri sploh za edino pravo pot. Zgradili so že zahtevne simulacijske sisteme, s katerimi proučujejo različne vidike socialnega in ekonomskega vedenja, pa tudi bioloških združb, npr. mravelj. Več o tem lahko bralec najde v zanimivih poljudnih delih "Turtles, termites, and traffic jams: explorations in massively parallel microwords" avtorja Mitchela Resnicka ter "Growing artificial societies: social science from the bottom up" avtorjev Joshue Epsteina in Roberta Axtella.

*Tim Vidmar, Andrej Likar*

---

<sup>1</sup> Šteje samo gola sreča.