PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 5
Strani 290–294, XIX

Nada Razpet:

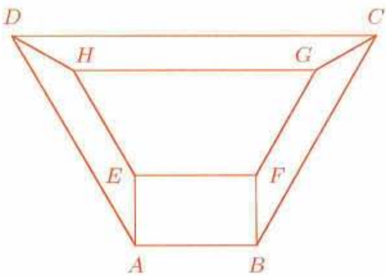
SESTAVIMO „ČETVEREC“ IZ ENAKIH KROGEL

Ključne besede: matematika, geometrija, prostorska predstavljivost, sestavljanje tetraedrov.

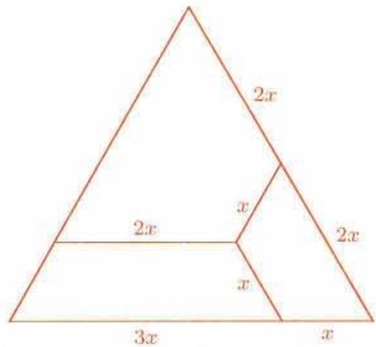
Elektronska verzija: http://www.presek.si/28/1452-Razpet.pdf

SESTAVIMO 'ČETVEREC' IZ ENAKIH KROGEL

Ob koncu lanskega leta smo lahko na policah nekaterih trgovin opazili zanimivo geometrijsko sestavljanko. Iz štirih skladnih teles je potrebno sestaviti pravilni (enakorobi) četverec. Prvi razrez četverca je 1940. leta patentiral Edward T. Johnson. Igra, ki sem jo kupila, pa je narejena po predlogi Wolfganga Schneiderja.



Slika 1. Tloris sestavnega dela.

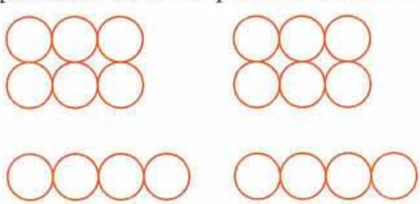


Slika 2. Stranska ploskev sestavljenega pravilnega četverca.

Robovi telesa so: $DC = 3x$, $AB = AE = DH = GC = x$, $BC = AD = HG = 2x$. Osnovna ploskev je enakokraki trapez $ABCD$, stranske ploskve enakokraki trapezi $DHGC$, $DAEH$, $BCGF$ in kvadrat $ABFE$, zgornja ploskev pa enakokraki trapez $EFGH$. Izdelava mreže tega telesa je preprosta.

Ob tej sestavljanki sem se spomnila na sestavljanko iz samih enakih krogel. Eno izmed takih sestavljank prodajajo tudi v naših trgovinah.

Iz 20 danih krogel, ki so zlepljene v gruče tako, kot kaže slika 3, je potrebno sestaviti pravilni 'četverec'.



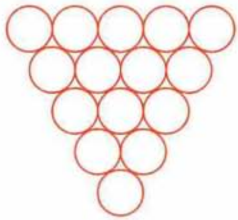
Slika 3.

Slika 4.

Iz 20 krogel lahko sestavimo 'četverec' tudi, če so štirje sestavni deli med seboj enaki. Kako jih povežemo, kaže slika 4, kako zložimo pa fotografija na III. strani ovitka.

Nekaj računanja

Koliko krogel potrebujemo za pravilni 'četverec', če osnovni rob sestavlja n krogel?



Slika 5.

Označimo število krogel na osnovni ploskvi s P_n, v celotnem 'četvercu' pa s K_n. S slike razberemo, da ima vsaka vrsta v osnovnem trikotniku eno kroglo manj. Začnemo z n kroglami in končamo z 1 kroglo. Torej je

$$P_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{1}{2}\, n(n+1) = \binom{n+1}{2}.$$

Vsaka naslednja plast, ki sestavlja pravilni 'četverec', je trikotnik, ki ima za osnovnico eno kroglo manj. Vse krogle dobimo, če seštejemo krogle po plasteh. Torej je:

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\, k(k+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + k\right).$$

Po znanih formulah dobimo

$$K_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}\, n(n+1)\right) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) = \binom{n+2}{3}.$$

Za nekaj začetnih števil sestavimo tabelo za število krogel K_n, ki jih potrebujemo za sestavljanje 'četverca', ki ima na osnovnici n krogel.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
K_n	1	4	10	20	35	56	84	120

Če želimo sestaviti pravilni četverec iz 4 skladnih delov, mora biti število krogel deljivo s 4. To pa pomeni, da je prva taka možnost (če ne upoštevamo trivialne rešitve, ko je $n = 2$) četverec z robom $n = 4$. Tega smo že sestavili.

Druga naslednja možnost je, da vzamemo za osnovni rob 6 krogel (potrebujemo 56 krogel). Izkaže se, da ne moremo narediti štirih skladnih delov; tudi pri $n = 7$, ko potrebujemo 84 krogel, ne gre (sestavni deli so zrcalno simetrični). Prvi naslednji pravilni četverec, ki ga lahko sestavimo iz 4 skladnih delov, ima rob $n = 8$. Zanj potrebujemo 120 kroglic. Vsak del ima torej 30 kroglic.

To pa bi lahko ugotovili že iz slike stranske ploskve četverca, ki smo ga sestavili iz štirih skladnih teles na prvi sliki. Osnovni rob četverca je bil razdeljen v razmerju 1 : 3.

Sestavni del za pravilni četverec z robom $n = 8$ ima dve plasti.

Spodnja plast sestavnega dela za pravilni četverec z robom $n = 8$.

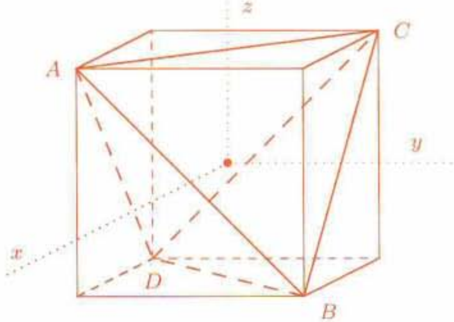
Zgornja plast sestavnega dela za pravilni četverec z robom $n = 8$.

Slika 6.

Pravilnemu 'četvercu' iz krogel očrtamo pravilni četverec

Poglejmo še, kako bi izračunali stranico pravilnega četverca, ki mu je 'četverec' iz krogel včrtan.

Da bomo lažje posplošili primer, začnimo s pravilnim 'četvercem' iz 4 krogel (tri v prvi plasti in ena v drugi). Središča krogel A, B, C in D ležijo v ogliščih kocke in tvorijo oglišča pravilnega četverca.



Slika 7.

Koordinatno izhodišče postavimo v središče kocke, koordinatne osi pa vzporedno z njenimi robovi. Rob kocke naj bo 1. Polmer krogel naj bo r. Očitno je, da je $r = \sqrt{2}/2$.

Glede na izbrani koordinatni sistem imajo središča krogel naslednje koordinate:

$$A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Določimo enačbo ravnine, ki gre skozi točke A, B, C. Normalni vektor ravnine skozi točke A, B, C je $\vec{n} = (1, 1, 1)$ in enačba ravnine je

$$x + y + z - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Razdalja te ravnine od koordinatnega izhodišča je $d_0 = 1/(2\sqrt{3})$.

Četverec, ki je očrtan kroglam, ima eno izmed ploskev vzporedno s to ravnino. Označimo jo s Π. Ravnina Π je od točk A, B in C oddaljena ravno za polmer krogel.

Oddaljenost d_1 ravnine Π od koordinatnega izhodišča je

$$d_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\,.$$

Ker pa so si vsi pravilni četverci med seboj podobni, dobimo iz razmerja

$$d_1 : r = \frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6 + \sqrt{6}}{6}$$

splošni izraz za d_1, ki se glasi:

$$d_1 = \frac{6 + \sqrt{6}}{6} \cdot r\,.$$

Razdalja d_1 naj bo polmer včrtane krogle za četverec s stranico a_2. Iz znane formule za polmer pravilnemu četvercu včrtane krogle

$$d_1 = \frac{a_2\sqrt{6}}{12}$$

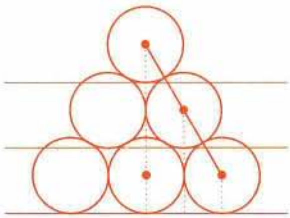
dobimo

$$\frac{6+\sqrt{6}}{6}\cdot r = \frac{a_2\sqrt{6}}{12}$$

in iz tega

$$a_2 = 2(\sqrt{6}+1)r\,.$$

Ali znamo poiskati stranico očrtanega četverca za poljubni pravilni 'četverec', ki ima na osnovnici n krogel? Najprej narišimo pomožno sliko. Vemo, da so ploskve četverca vzporedne z zveznico središč krogel, ki so označene na sliki 8.



Slika 8.

S slike razberemo, da se dolžine stranic očrtanega četverca pri dodajanju posameznih plasti razlikujejo ravno za premer krogel (polovica stranice se razlikuje za r). Ker je pri $n=2$ stranica $a_2 = 2(\sqrt{6}+1)r$, je pri n kroglah na osnovnici stranica očrtanega četverca enaka

$$a_n = 2r(\sqrt{6}+(n-1))\,.$$

Preverimo, da rezultat velja tudi za eno kroglo:

$$a_1 = 2r\sqrt{6} \Longrightarrow r = \frac{a_1\sqrt{6}}{12}\,.$$

Nada Razpet

ZLOŽENKA – Rešitev s str. 194

1. meter, 2. enota, 3. račun, 4. fokus, 5. diada; iskano geslo v obarvanem stolpcu je TOČKA.

Dragoljub M. Milošević