POVRŠINE IN PROSTORNINE PRAVILNIH POLIEDROV

O pravilnih poliedrih je bilo v Preseku že mnogo napisanega. Ponovimo: Pravilni polieder je tako konveksno geometrijsko telo, ki izpolnjuje pogoja:

1. omejeno je s samimi med seboj skladnimi pravilnimi večkotniki;
2. v vsakem oglišču se stika enako število teh večkotnikov.

V zvezi s tem je zanimivo poudariti, da je pravilnih večkotnikov, do podobnosti natančno, nešteto mnogo (enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilni petkotnik, ...), pravilnih poliedrov pa je le pet, seveda do podobnosti natančno. Imena so dobili glede na število svojih mejnih ploskev: pravilni tetraeder (četverec), pravilni heksaeder (šesterec, kocka), pravilni oktaeder (osmerec), pravilni dodekaeder (dvanajsterec) in pravilni ikozaeder (dvajseterec). Da je pravilnih poliedrov le pet, je znano že iz antičnih časov. Videli bomo, da je obravnava slednjih dveh kar zapletena reč, zato ni čudno, da o njiju ni veliko napisanega v učbenikih.

Na tem mestu se ne bomo spuščali v dokazovanje, zakaj je pravilnih poliedrov samo pet, kajti tokrat je naš cilj, da izrazimo površino P, prostornino V, polmer včrtane krogle r, polmer očrtane krogle R in kot ϑ med sosednjima stranskima ploskvama z dolžino roba a, seveda za vsak pravilni polieder posebej. Mimogrede pa bomo spoznali še kaj, kar utegne biti zanimivo in koristno. Za sosednji bomo imeli mejni ploskvi telesa, če imata skupen rob. Kot ϑ imenujemo tudi diedrski kot pravilnega poliedra.

Število oglišč obravnavanega pravilnega poliedra naj bo v, število robov e in število mejnih ploskev f. Ta tri števila niso neodvisna, povezuje jih namreč Eulerjeva poliedrska formula $v - e + f = 2$.

Nadalje naj število p označuje, koliko oglišč ima mejna ploskev, število q pa, koliko robov se stika v vsakem oglišču pravilnega poliedra. Navedena števila so zbrana v preglednici.

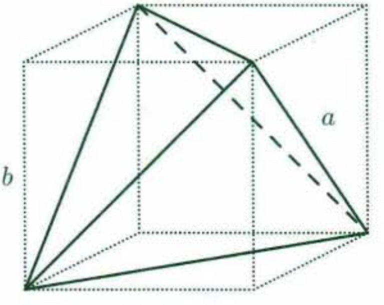
Vsak pravilni polieder ima še dodatno zanimivost. Središča njegovih mejnih ploskev določajo pravilni polieder, in sicer pravilni tetraeder da pravilni tetraeder, pravilni heksaeder (kocka) da pravilni oktaeder, pravilni oktaeder da kocko, pravilni dodekaeder da pravilni ikozaeder, in obratno, pravilni ikozaeder da na ta način pravilni dodekaeder. Pravimo, da ima vsak pravilni polieder za dualno telo tudi pravilni polieder – pravilni tetraeder je dualen sam sebi; dualna sta si kocka in pravilni oktaeder ter pravilni dodekaeder in pravilni ikozaeder.

pravilni	v	e	f	p	q
tetraeder	4	6	4	3	3
heksaeder	8	12	6	4	3
oktaeder	6	12	8	3	4
dodekaeder	20	30	12	5	3
ikozaeder	12	30	20	3	5

Izkaže se, da se iskane količine P, V, r, R in ϑ izražajo s številoma p in q ter robom a, toda razmeroma zapleteno. Brez težav najdemo povezavo med S, V in r. Pravilni polieder namreč lahko razrežemo na f skladnih pravilnih piramid, ki imajo skupni vrh v poliedrovem središču in za osnovno ploskev poliedrove mejne ploskve. Osnovna ploskev take piramide ima ploščino S/f in višino r. Zato je njena prostornina enaka $(1/3)\cdot(S/f)\cdot r$, prostornina obravnavanega poliedra pa $V = f\cdot(1/3)\cdot\cdot(S/f)\cdot r = (1/3)Sr$. Torej velja za vsak pravilni polieder formula

$$V = \frac{1}{3}\,Sr\,. \tag{1}$$

1. Pravilni tetraeder včrtajmo kocki tako, kot kaže slika 1. Njegovi robovi so enaki šestim paroma nevzporednim mimobežnim ploskovnim diagonalam kocke. Rob kocke b se izraža z robom tetraedra a po formuli: $b = a/\sqrt{2}$. Površina tetraedra je seveda $S = 4\cdot a^2\sqrt{3}/4 = a^2\sqrt{3}$. Prostornino pravilnega tetraedra lahko dobimo tako, da od prostornine kocke z robom b odštejemo prostornine štirih piramid, ki imajo za osnovno ploskev polovico mejne ploskve kocke in za višino rob kocke:



Slika 1. Kocka in pravilni tetraeder.

$$V = b^3 - 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2}{2}\cdot b = b^3 - \frac{2}{3}\cdot b^3 = \frac{1}{3}\cdot b^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3\,.$$

Polmer očrtane krogle R je očitno enak polovici telesne diagonale kocke:

$$R = \frac{1}{2}\cdot b\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{4}\,a\,.$$

Polmer r pa dobimo iz formule (1)

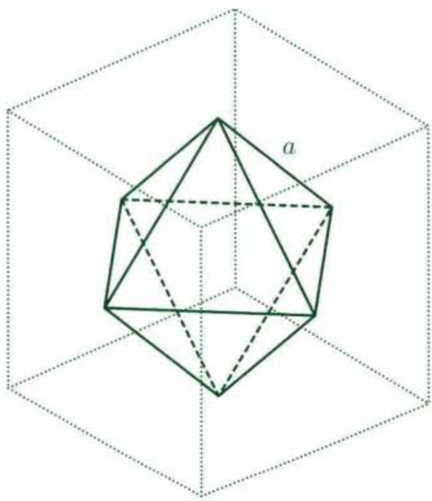
$$r = 3V/S = \frac{\sqrt{6}}{12}\, a\,.$$

Kot med sosednjima stranskima ploskvama ϑ dobimo iz pravokotnega trikotnika, ki ima za hipotenuzo višino enakostraničnega trikotnika s stranico a, za kateti pa polmer takemu trikotniku včrtanega kroga in višino tetraedra. Kot ϑ leži nasproti telesni višini tetraedra. Tako imamo $\cos\vartheta = 1/3$, iz česar sledi približek $\vartheta \doteq 70^\circ\, 31'\, 44''$. Združimo vse rezultate za pravilni tetraeder:

$$S = \sqrt{3}\, a^2\,,\ V = \frac{\sqrt{2}}{12}\, a^3\,,\ r = \frac{\sqrt{6}}{12}\, a\,,\ R = \frac{\sqrt{6}}{4}\, a\,,\ \cos\vartheta = \frac{1}{3}\,.$$

2. Pravilni heksaeder ali kocka z robom a nam ne dela težav:

$$S = 6\, a^2\,,\ V = a^3\,,\ r = \frac{1}{2}\, a\,,\ R = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a\,,\ \vartheta = 90^\circ\,.$$



Slika 2. Kocka in pravilni oktaeder kot dualna poliedra.

3. Pravilni oktaeder ima površino, ki je enaka 8-kratni ploščini enakostraničnega trikotnika s stranico a, torej $S = 8 \cdot a^2\sqrt{3}/4 = 2\sqrt{3}\, a^2$. Ker je pravilni oktaeder dvojna pravilna kvadratna piramida, dobimo $V = 2\cdot(1/3)\cdot a^2\cdot(a\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/3)\, a^3$. Polmer očrtane krogle je enak polovici diagonale kvadrata s stranico a, torej $R = a\sqrt{2}/2$. Polmer včrtane krogle pa lahko dobimo iz formule (1) $r = 3V/S = a\sqrt{6}/6$. Brez težav dobimo tudi kot ϑ med dvema sosednjima mejnima ploskvama:

$$\cos(\vartheta/2) = 1/\sqrt{3}\,.$$

Po formuli $2\cos^2(\vartheta/2) = 1 + \cos\vartheta$ pridemo še do enačbe $\cos\vartheta = -1/3$, iz katere izračunamo približek $\vartheta \doteq 109^\circ\, 28'\, 16''$. Zbrani rezultati so:

$$S = 2\sqrt{3}\,a^2\,,\ V = \frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3\,,\ r = \frac{\sqrt{6}}{6}\,a\,,\ R = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a\,,\ \cos\vartheta = -\frac{1}{3}\,.$$

4. Pravilni ikozaeder je nekoliko bolj zahteven za obravnavo. Tu bomo uporabili koordinatno metodo, pri kateri nam bo pomagal zlati pravokotnik, o katerem smo v Preseku tudi že pisali. Zlati pravokotnik ima stranici v razmerju zlatega števila $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, ki je pozitivna rešitev enačbe $\phi^2 = 1 + \phi$. Vzemimo tri skladne zlate pravokotnike z daljšo stranico $\phi\, a$ in krajšo a, jih med seboj prebodimo ter vpeljimo pravokotni koordinatni sistem $Oxyz$ tako, kot kaže slika 3. Če gledamo iz zelo oddaljene točke na pozitivni polovici osi x, vidimo oglišča

$$A_x(0, \frac{\phi a}{2}, \frac{a}{2})\,,\ B_x(0, -\frac{\phi a}{2}, \frac{a}{2})\,,\ C_x(0, -\frac{\phi a}{2}, -\frac{a}{2})\,,\ D_x(0, \frac{\phi a}{2}, -\frac{a}{2})\,,$$

iz zelo oddaljene točke na pozitivni polovici osi y vidimo oglišča

$$A_y(\frac{a}{2}, 0, \frac{\phi a}{2})\,,\ B_y(\frac{a}{2}, 0, -\frac{\phi a}{2})\,,\ C_y(-\frac{a}{2}, 0, -\frac{\phi a}{2})\,,\ D_y(-\frac{a}{2}, 0, \frac{\phi a}{2})$$

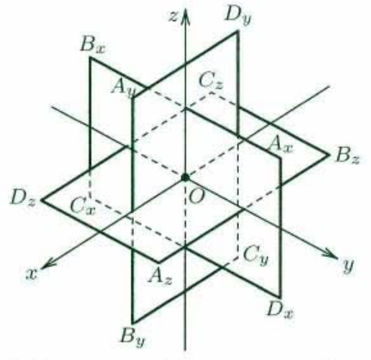
in iz zelo oddaljene točke na pozitivni polovici osi z oglišča

$$A_z(\frac{\phi a}{2}, \frac{a}{2}, 0)\,,\ B_z(-\frac{\phi a}{2}, \frac{a}{2}, 0)\,,\ C_z(-\frac{\phi a}{2}, -\frac{a}{2}, 0)\,,\ D_z(\frac{\phi a}{2}, -\frac{a}{2}, 0)\,.$$

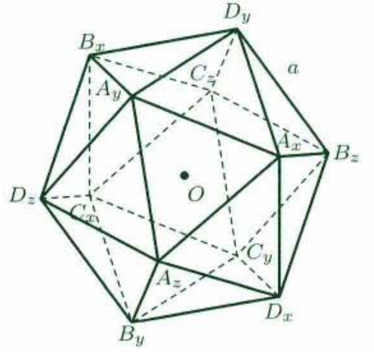
Vidimo torej, da so vsa oglišča, glede na koordinate, oblike:

$$(0, \pm\frac{\phi a}{2}, \pm\frac{a}{2})\,,\ (\pm\frac{a}{2}, 0, \pm\frac{\phi a}{2})\,,\ (\pm\frac{\phi a}{2}, \pm\frac{a}{2}, 0)\,.$$

Število točk vsake vrste je 4, skupaj 12. Ni težko ugotoviti, da naštete točke sestavljajo oglišča pravilnega ikozaedra z robom a. Njegovih dvajset mejnih ploskev sestavljajo enakostranični trikotniki. Naštejmo tistih pet, ki imajo skupno oglišče A_x: $A_xD_yA_y$, $A_xA_yA_z$, $A_xA_zD_x$, $A_xD_xB_z$, $A_xB_zD_y$.



Slika 3. Paroma pravokotni zlati pravokotniki.



Slika 4. Pravilni ikozaeder.

Da je na primer trikotnik z oglišči $A_xD_yA_y$ enakostraničen s stranico a, preverimo neposredno:

$$|A_xD_y|^2 = |A_yA_x|^2 = \frac{a^2}{4}(1+\phi^2+(\phi-1)^2) = a^2 = |D_yA_y|^2 .$$

Središče (= težišče) tega trikotnika je v točki

$$A(\frac{1}{3}(0-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}), \frac{1}{3}(\frac{\phi a}{2}+0+0), \frac{1}{3}(\frac{a}{2}+\frac{\phi a}{2}+\frac{\phi a}{2})) .$$

Po poenostavljanju dobimo

$$A(0, \frac{\phi a}{6}, \frac{(1+2\phi)a}{6}) .$$

Sedaj lahko že izračunamo polmera r in R za pravilni ikozaeder. Najprej velja

$$r = |OA| = \frac{a}{6}\sqrt{\phi^2+(1+2\phi)^2} = \frac{a}{6}\sqrt{6+9\phi} .$$

Nazadnje dobimo

$$r = \frac{a}{12}\sqrt{42+18\sqrt{5}} = \frac{a}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}) .$$

Še laže izračunamo R:

$$R = |OA_x| = \frac{a}{2}\sqrt{\phi^2+1} = \frac{a}{2}\sqrt{2+\phi} = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} .$$

Ker je očitno $S = 20 \cdot (a^2\sqrt{3}/4) = 5a^2\sqrt{3}$, dobimo po formuli (1)

$$V = \frac{1}{3}Sr = \frac{5a^3}{36}\sqrt{3}(3\sqrt{3} + \sqrt{15}) = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5})\,.$$

Bralec, ki je vešč vektorskega računa, bo morda prostornino izračunal še kako drugače, npr. kot dvajsetkratno prostornino tetraedra $OA_xD_yA_y$:

$$V = 20 \cdot \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA_x}, \overrightarrow{OD_y}, \overrightarrow{OA_y}) = \frac{10}{3} \cdot (\frac{a}{2})^3 \begin{vmatrix} 0 & \phi & 1 \\ -1 & 0 & \phi \\ 1 & 0 & \phi \end{vmatrix} = \frac{5a^3}{12} \cdot (2\phi^2)\,.$$

Nazadnje bo dobil enak rezultat.

Da bi izračunali kot med sosednjima mejnima ploskvama, poiščemo še središče B trikotnika $A_xA_yA_z$. Dobimo

$$B(\frac{(1+\phi)a}{6}, \frac{(1+\phi)a}{6}, \frac{(1+\phi)a}{6})\,.$$

Iskani kot ϑ je suplementaren kotu ϑ' med vektorjema $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$ oz. kotu med vektorjema $\vec{a} = (0, \phi, 1 + 2\phi)$ in $\vec{b} = (1 + \phi, 1 + \phi, 1 + \phi)$, ki smo ju dobili iz $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$ s krajšanjem s faktorjem $a/6$. Torej velja

$$\cos\vartheta' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 + 7\phi}{6 + 9\phi} = \frac{2\phi - 1}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

Tako smo dobili $\cos\vartheta = -\sqrt{5}/3$ in približek $\vartheta \doteq 138^\circ\, 11'\, 23''$.

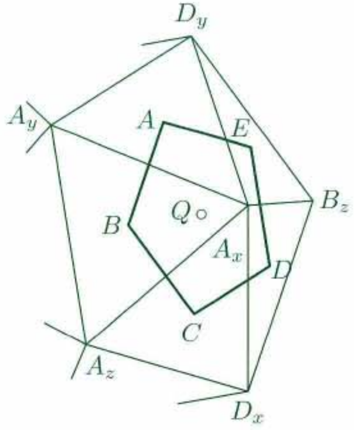
Zberimo rezultate za pravilni ikozaeder:

$$S = 5\sqrt{3}\,a^2\,,\ V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})\,a^3\,,$$

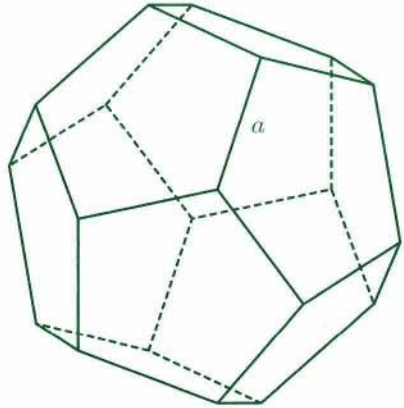
$$r = \frac{1}{12}(3\sqrt{3} + \sqrt{15})\,a\,,\ R = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,a\,,\ \cos\vartheta = -\frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

5. Pravilni dodekaeder bomo obravnavali kot dual pravilnega ikozaedra. S pridom bomo uporabili rezultate, dobljene pri ikozaedru. Središča tistih petih mejnih ploskev pravilnega ikozaedra, ki imajo skupno oglišče, npr. A_x, so oglišča pravilnega petkotnika s stranico $|AB|$, za katero velja

$$|AB|^2 = (\frac{a}{6})^2((1 + \phi)^2 + 1 + \phi^2) = \frac{4\phi^2 a^2}{36}\,.$$



Slika 5. Nastanek pravilnega dodekaedra.



Slika 6. Pravilni dodekaeder.

Torej je $|AB| = \phi a/3$. Da dobimo pravilni dodekaeder z robom a, moramo torej vse koordinate oglišč pravilnega ikozaedra in iz njega dobljenih oglišč dualnega poliedra pomnožiti s faktorjem $3/\phi$. Tako bi dobili koordinate vseh dvajsetih oglišč pravilnega dodekaedra, npr.

$$A(0, \frac{3}{\phi} \cdot \frac{\phi a}{6}, \frac{3}{\phi} \cdot \frac{(1+2\phi)a}{6}), \; B(\frac{3}{\phi} \cdot \frac{(1+\phi)a}{6}, \frac{3}{\phi} \cdot \frac{(1+\phi)a}{6}, \frac{3}{\phi} \cdot \frac{(1+\phi)a}{6}).$$

Podobno se izražajo koordinate točk C, D in E. Namenoma smo izbrali vsa oglišča iste mejne ploskve, to je pravilnega petkotnika $ABCDE$. Ko koordinate poenostavimo, dobimo:

$$A(0, \frac{a}{2}, \frac{(1+\phi)a}{2}), \; B(\frac{\phi a}{2}, \frac{\phi a}{2}, \frac{\phi a}{2}), \; C(\frac{a}{2}, \frac{(1+\phi)a}{2}, 0),$$
$$D(-\frac{a}{2}, \frac{(1+\phi)a}{2}, 0), \; E(-\frac{\phi a}{2}, \frac{\phi a}{2}, \frac{\phi a}{2}).$$

Iz oglišč pravilnega ikozaedra lahko ugotovimo, da so vse koordinate oglišč pravilnega dodekaedra oblike:

$$(0, \pm\frac{a}{2}, \pm\frac{(1+\phi)a}{2}), \; (\pm\frac{(1+\phi)a}{2}, 0, \pm\frac{a}{2}),$$
$$(\pm\frac{a}{2}, \pm\frac{(1+\phi)a}{2}, 0), \; (\pm\frac{\phi a}{2}, \pm\frac{\phi a}{2}, \pm\frac{\phi a}{2}).$$

Število točk prve, druge in tretje vrste je po 4, točk četrte vrste pa je 8, skupaj res dvajset.

Polmer R sedaj zlahka izračunamo:

$$R = |OA| = \frac{a}{2}\sqrt{1+(1+\phi)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3\phi^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}\phi = \frac{a}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{15})\,.$$

Prav tako ni težko izračunati kota ϑ med sosednjima mejnima ploskvama pravilnega dodekaedra. Ta kot je suplementaren kotu ϑ', ki ga npr. oklepata vektorja $\overrightarrow{OA_y}$ in $\overrightarrow{OB_y}$ v pravilnem ikozaedru. To je kot, ki ga oklepata vektorja $\vec{a} = (1,0,\phi)$ in $\vec{b} = (1,0,-\phi)$ oz. diagonali zlatega pravokotnika. Račun poteka takole:

$$\cos\vartheta\,' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1-\phi^2}{1+\phi^2} = \frac{\phi}{2+\phi} = \frac{2\phi-1}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}\,.$$

Tako smo dobili $\cos\vartheta = -\sqrt{5}/5$ in približek $\vartheta \doteq 116^\circ\, 33'\, 54''$.

Središče pravilnega petkotnika $ABCDE$ je v točki Q s koordinatami

$$(0, \frac{(3+4\phi)a}{10}, \frac{(1+3\phi)a}{10})\,,$$

od koder dobimo

$$r = |OQ| = \frac{a}{10}\sqrt{(3+4\phi)^2+(1+3\phi)^2} = \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}\,.$$

Polmer ϱ včrtanega kroga mejne ploskve izračunamo z dvakratno uporabo Pitagorovega izreka:

$$\varrho^2 = R^2 - r^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{(25+10\sqrt{5})a^2}{100}\,,$$

torej je

$$\varrho = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,.$$

Površina pravilnega dodekaedra je zato

$$S = 12\cdot 5\cdot \frac{a\varrho}{2} = 30a\varrho = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,.$$

Prostornino dobimo po formuli (1)

$$V = \frac{1}{3}Sr = \frac{a^3}{20}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\cdot\sqrt{250+110\sqrt{5}} = \frac{a^3}{4}\sqrt{470+210\sqrt{5}}\,.$$

Ker je $470 + 210\sqrt{5} = (15 + 7\sqrt{5})^2$, imamo nazadnje

$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})\,.$$

Zberimo dobljene rezultate za pravilni dodekaeder:

$$S = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\,a^2\,,\ V = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})\,a^3\,,$$
$$r = \frac{1}{20}\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}\,a\,,\ R = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15})\,a\,,\ \cos\vartheta = -\frac{\sqrt{5}}{5}\,.$$

Tako smo izračunali vse pomembne količine pri pravilnih poliedrih z robom a. Morda bi se dalo marsikaj opraviti kako drugače in enostavneje. Poskusite!

Marko Razpet

NEOBIČAJNA KONSTRUKCIJSKA NALOGA – Rešitev s str. 130

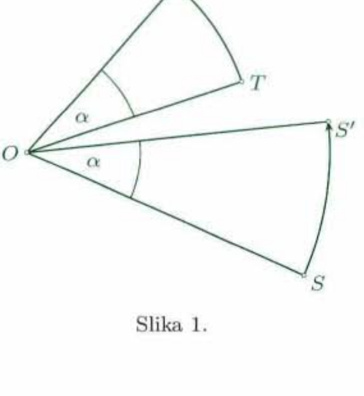
Naloga ni samo neobičajna, ampak tudi zahtevna, saj kar ne vemo, kje naj začnemo.

Dokaj preprosto in zelo elegantno pa jo lahko rešimo, če pri njeni analizi uporabimo ravninske zasuke. Zato povejmo najprej nekaj najnujnejšega o njih.

Zasuki v ravnini

Definicija

Naj bo O dana točka ravnine in α dani kot. Zasuk okrog točke O za kot α togo zavrti ravnino okrog O za kot α. To pomeni, da poljubno točko T ravnine preslika v točko T', ki leži na isti krožnici s središčem v O kot točka T takó, da poltraka OT in OT' oklepata kot α. Običajno merimo kot od poltraka OT k OT' v pozitivni smeri, to je smeri, nasprotni gibanju kazalcev na uri (slika 1). Če želimo opisati zasuk za velikost kota α v nasprotni smeri, govorimo o zasuku za kot $-\alpha$ ali za kot $360° - \alpha$. Točko O



Slika 1.