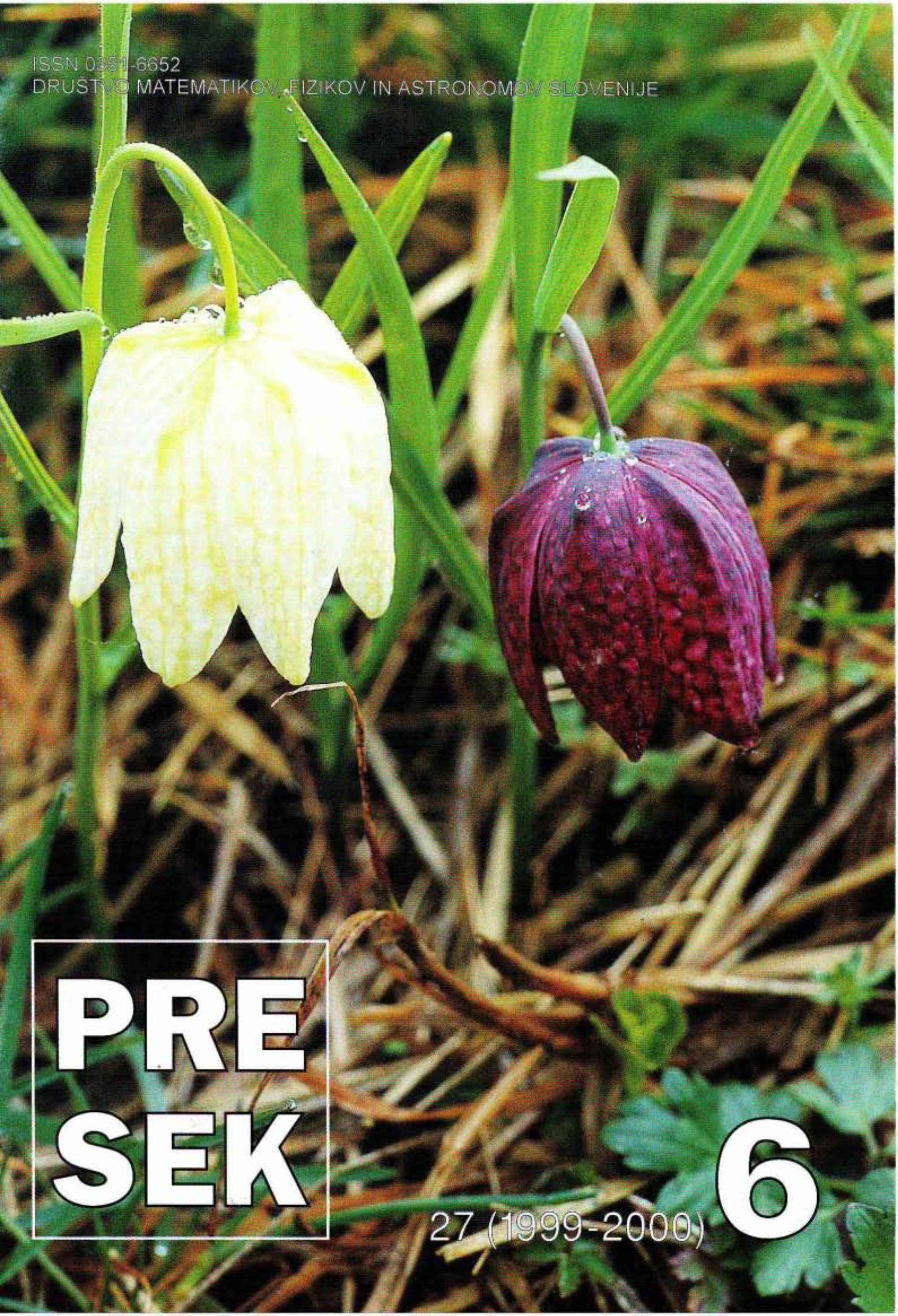
ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

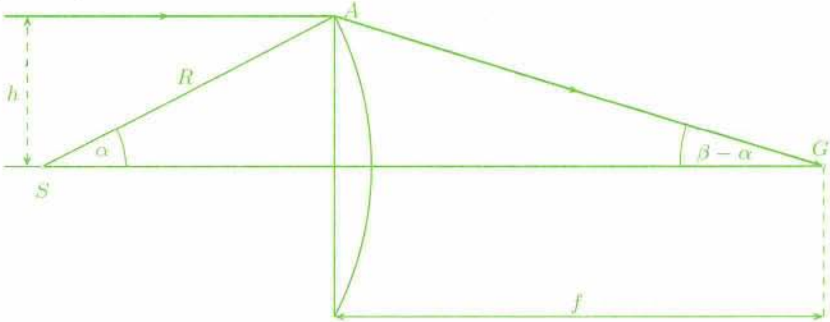


PRESEK

27 (1999-2000) 6

FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA V – LEČE, STEKLA, OČALA

Imamo tanko zbiralno lečo z eno ravno in eno sferično površino (to je *plankonveksno* lečo). Leča je odsek krogle s polmerom R in središčem S (slika 1).



Slika 1.

Debelo narisani žarek prihaja vzporedno optični osi leče in se lomi šele na zakrivljeni strani v točki A. Daljica SA je polmer krogle in zato pravokotna na površje. Mesto loma si povečano oglejmo na sliki 2.

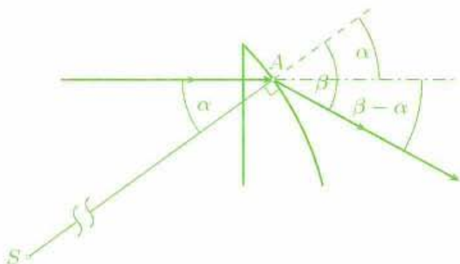
Velja lomni zakon:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n\,,$$

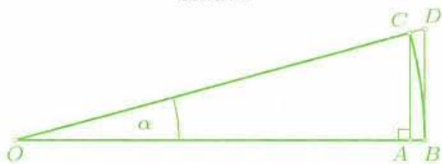
kjer je n *lomni količnik* snovi, iz katere je leča. Lomljeni žarek gre skozi gorišče G leče. Če je f goriščna razdalja, je očitno

$$\sin\alpha = \frac{h}{R}\,, \quad \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{h}{f}\,.$$

Od zdaj naprej bomo kote merili le *v radianih.* Če je α majhen, je $\sin\alpha \doteq \alpha \doteq \operatorname{tg}\alpha$ (slika 3).



Slika 2.



Slika 3. Krožni lok OBC ima polmer $|OB| = |OC| = 1$. Njegova dolžina je približno enaka $|AC| = \sin\alpha$ in $|BD| = \operatorname{tg}\alpha$.

Ker sta potem majhna tudi β in $\beta - \alpha$, velja približno

$$\frac{\beta}{\alpha} \doteq n\,, \qquad \alpha \doteq \frac{h}{R}\,, \qquad \beta - \alpha \doteq \frac{h}{f}$$

in od tod

$$\frac{1}{f} \doteq \frac{\beta - \alpha}{h} \doteq \frac{(n-1)\alpha}{\alpha R} = \frac{n-1}{R}\,.$$

Dobili smo formulo

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}\,. \tag{1}$$

Denimo, da lečo potrebujemo za očala. Optična moč $\frac{1}{f}$ je potem predpisana. Če vzamemo steklo z večjim n, iz (1) sledi, da moramo zvečati R. Pri enakem premeru $2h$ to pomeni tanjšo lečo.

Osebam, ki potrebujejo večjo korekcijo vida (včasih pa tudi drugim), danes optiki ponujajo stekla z lomnim količnikom 1.7 ali celo "super tanka" stekla z lomnim količnikom 1.8 ali 1.9. (Zanimivo je, da taka stekla niso lažja, saj imajo večjo gostoto).

Čim večji je lomni količnik, tem dražja so stekla. Toliko bolj presenetljivo je, da v Zeissovem katalogu pri najcenejšem steklu Punktal z lomnim količnikom 1.53 piše: *zelo dobre upodobitvene lastnosti*. Pri steklu z lomnim količnikom 1.6 piše: *dobre upodobitvene lastnosti*. Stekla s še višjim lomnim količnikom pa niso več deležna tovrstne pohvale.

To je povezano s tako imenovano *barvno napako*. Lomni količnik stekla pada z valovno dolžino: za rdečo svetlobo je manjši kot za modro. To pa po formuli (1) pomeni, da je goriščna razdalja naše leče za modro svetlobo manjša kot za rdečo; za vijolično pa še manjša kot za modro. Morda ste že opazili, da je na fotografskih objektivih oznaka za ostrenje za infrardečo svetlobo na drugem mestu kot za navadno svetlobo. Objektiv ima torej za infrardečo svetlobo drugačno (večjo) goriščnico kot za običajno svetlobo.

Kako bi primerjali barvno napako dveh plankonveksnih leč z enako goriščno razdaljo in enakim premerom, a izdelanih iz različnih materialov?

Denimo, da imajo vse naše leče enako goriščno razdaljo za rumeno svetlobo (ru) z valovno dolžino $D \doteq 588$ nm (nanometrov) $= 588 \cdot 10^{-9}$ m. Torej je

$$\frac{1}{f} = (n_{\mathrm{ru}} - 1)\frac{\alpha}{h}\,.$$

Robne žarke, vzporedne osi leče, ta prelomi za kot približno

$$\beta - \alpha = (n-1)\alpha\,.$$

Modri žarek (mo) z valovno dolžino $F \doteq 486$ nm prelomi za kot približno

$$(n_{\mathrm{mo}} - 1)\alpha\,,$$

rdeči žarek (rd) z valovno dolžino $C \doteq 656$ nm pa steklo manj upočasni kot modri in zato prelomi za manjši kot, ki je približno enak

$$(n_{\mathrm{rd}} - 1)\alpha\,.$$

(Valovne dolžine D, F, C pripadajo trem značilnim spektralnim črtam.)

Kot med rdečim in modrim žarkom je torej približno

$$\delta = (n_{\mathrm{mo}} - n_{\mathrm{rd}})\alpha \doteq \frac{(n_{\mathrm{mo}} - n_{\mathrm{rd}})h}{f(n_{\mathrm{ru}} - 1)}\,.$$

Ker sta h, f dana, je kot med modrim in rdečim žarkom sorazmeren količniku

$$\frac{n_{\mathrm{mo}} - n_{\mathrm{rd}}}{n_{\mathrm{ru}} - 1}\,.$$

Čim manjši je ta količnik oziroma čim večja je njegova inverzna vrednost

$$V = \frac{n_{\mathrm{ru}} - 1}{n_{\mathrm{mo}} - n_{\mathrm{rd}}}\,,$$

tem manj leča razkloni belo svetlobo in tem manj uporabnik očal občuti barvno napako.

Kvocient V je *Abbejevo število* stekla (za interval med F in C). Giblje se nekako med 20 in 90. (Ernst Abbe je bil znan nemški optik, ki je deloval v prejšnjem stoletju in postavil na noge tovarno Carl Zeiss.) Torej je

$$\delta \doteq \frac{h}{fV}\,. \tag{2}$$

Iz (2) sledi, da je pri danem steklu in danem polmeru h stekelc v očalih kot δ med modrim in rdečim žarkom sorazmeren f^{-1}, se pravi optični moči stekelc. Pri močnejši korekciji uporabnik bolj občuti barvno napako. Zmanjšamo jo lahko le tako, da zmanjšamo polmer h stekelc ali pa zvečamo Abbejevo število V.

Prva možnost deloma pojasni, zakaj kontaktne leče (ki imajo majhen polmer h) bolje korigirajo vid močno kratkovidnim in daljnovidnim ljudem kot očala.

Čim več dioptrij, tem debelejše so tudi leče po formuli (1). Debelina pa prinaša še druge optične napake. Zato bi bilo zelo dobro imeti stekla z velikim lomnim količnikom in velikim Abbejevim številom – ne samo za očala, ampak tudi za druge optične priprave.

Včasih so lomni količnik stekla večali z dodajanjem svinčevega oksida. Pri tem pa se je naglo zmanjševalo Abbejevo število. Za kristalne vaze je bilo to zaželeno, saj so se v svetlobi mavrično iskrile. Pred približno 120 leti so nemške tovarne s sistematičnimi raziskavami ugotovile, da lahko z barijem, borom in nekaterimi drugimi elementi izdelajo stekla, ki so v primerjavi s prejšnjimi pri podobnih lomnih količnikih imela višja Abbejeva števila. Zelo znano je borovo BK-7 steklo, ki ima lomni količnik 1.52 in $V = 64$. Uporaba novih stekel je prinesla velik napredek v optiki in prve res dobre fotografske objektive.

Sen o steklih z velikim lomnim količnikom in velikim Abbejevim številom pa se ni uresničil. Tik pred drugo svetovno vojno so sicer odkrili, da z dodatkom *redkih zemelj* (predvsem *lantana*) dobijo stekla z zelo visokimi lomnimi količniki in s sprejemljivimi Abbejevimi števili. Eden od nazivov za stekla s temi lastnostmi je HLD (high index, low dispersion). Iz kataloga prej omenjenega proizvajalca stekel za očala sem si prepisal podatke o najbolj uporabljanih materialih. Navajam jih v zaokroženi obliki:

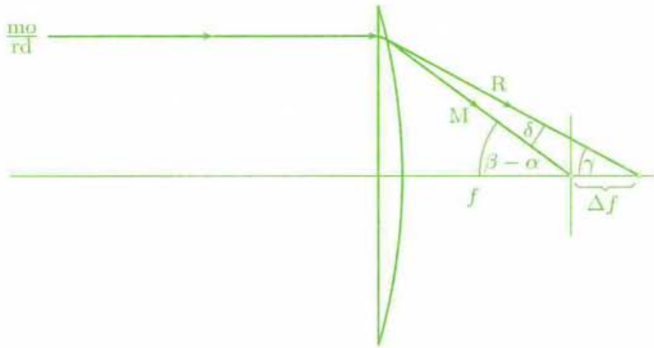
n	V
1.53	58
1.6	44
1.7	40
1.8	35
1.9	30

Plastika: $n = 1.5$, $V = 58$.

Vrnimo se k sliki 1, le da bo naša leča zdaj v fotoaparatu. Vzemimo, da je h dosti manjši kot f, tako da je

$$h \doteq (\beta - \alpha) f \qquad \text{(slika 4)}.$$

Denimo, da svetloba na lečo prihaja iz več raznobarvnih luči, postavljenih druga ob drugi daleč stran od leče. Če kot na sliki 4 ostra slika modre



Slika 4.

luči nastane na filmu, potem ostra slika rdeče luči nastane v oddaljenosti Δf za filmom. Ker je $\gamma = \beta - \alpha - \delta$, je

$$h \doteq (f + \Delta f)\gamma = (f + \Delta f)(\beta - \alpha) - (f + \Delta f)\delta\,.$$

Primerjajmo z gornjo enačbo, pa je

$$(\Delta f)(\beta - \alpha) = (f + \Delta f)\delta \doteq f\delta\,.$$

Po (2) je

$$f\delta \doteq \frac{h}{V} \doteq \frac{(\beta - \alpha)f}{V}\,.$$

Torej je

$$\Delta f \doteq \frac{f}{V}\,. \tag{3}$$

Čim večji je f, tem bolj narazen sta sliki modre in rdeče luči.

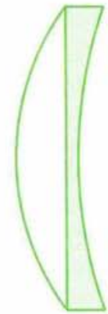
Kot vemo iz članka o globinski ostrini v naši seriji *Fotografija in matematika* (Presek XXV/4), pri zaslonskem številu 8 ostra slika lahko nastane po dogovoru 8/30 mm stran od filma, pa bo na filmu še sprejemljivo ostra. Če hočemo obenem upodobiti modro in rdečo luč, smeta njuni sliki nastati kvečjemu $\Delta f = 16/30$ mm narazen. Za BK-7 steklo z $V = 64$ je ustrezna goriščnica največ

$$f \doteq V \cdot \Delta f \doteq 34 \text{ mm}\,.$$

Premer take leče je $34/8$ mm $\doteq 4$ mm. Da bi hkrati dobro upodobili vse luči – od temno rdeče do vijolične – bi bilo treba vzeti še manjši f.

Z enostavno lečo si torej ne moremo kaj prida pomagati. Sestavimo zato *akromat* iz zbiralne leče in razpršilne leče (slika 5). Zbiralna leča naj ima lomni količnik n_1 in Abbejevo število V_1 ter goriščno razdaljo f_1, kjer je

$$\frac{1}{f_1} = \frac{n_1 - 1}{R_1} .$$



Slika 5.

Razpršilna leča naj ima lomni količnik n_2 in Abbejevo število V_2 ter goriščno razdaljo f_2, kjer je

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1 - n_2}{R_2} < 0 .$$

(V mislih zapolnite vdolbino v razpršilni leči s plankonveksno lečo...) Kot vemo, je goriščna razdalja sestava f, kjer je

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{n_1 - 1}{R_1} + \frac{1 - n_2}{R_2} .$$

Zahtevamo, da je f isti za rdečo in za modro svetlobo, se pravi

$$\frac{n_{1\mathrm{rd}} - 1}{R_1} + \frac{1 - n_{2\mathrm{rd}}}{R_2} = \frac{n_{1\mathrm{mo}} - 1}{R_1} + \frac{1 - n_{2\mathrm{mo}}}{R_2} .$$

Od tod je

$$\frac{n_{1\mathrm{rd}} - n_{1\mathrm{mo}}}{R_1} = \frac{n_{2\mathrm{rd}} - n_{2\mathrm{mo}}}{R_2} .$$

Upoštevajmo definicijo za $V = (n_{\mathrm{ru}} - 1)/(n_{\mathrm{rd}} - n_{\mathrm{mo}})$, pa je

$$\frac{n_{1\mathrm{ru}} - 1}{R_1} \cdot \frac{1}{V_1} = \frac{n_{2\mathrm{ru}} - 1}{R_2} \cdot \frac{1}{V_2} .$$

Ker je $1/f_{1\mathrm{ru}} = (n_{1\mathrm{ru}} - 1)/R_1$, je tako

$$f_{1\mathrm{ru}} V_1 = -f_{2\mathrm{ru}} V_2 .$$

Če naj bo sestav zbiralna leča, mora biti $f_{1\mathrm{ru}} < -f_{2\mathrm{ru}}$, zato mora biti $V_1 > V_2$. Za akromat torej potrebujemo stekli z *različnima* Abbejevima številoma.

Peter Legiša

Akromatična predleča je precej debelejša in težja od enako močne enostavne predleče, naredi pa seveda tudi precej boljšo sliko.

Močno povečan vogal slike, narejene s 400 milimetrskim objektivom, kaže t.i. sekundarno ali preostalo barvno napako. Čeprav je goriščnica enaka za modro in rdečo svetlobo, so "iz kontrole ušle" nekatere druge barve: robovi črk so na eni strani obarvani vijolično, na drugi zeleno.