PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **27** (1999/2000)
Številka 5
Strani 259–264

Jože Grasselli:

OB NEKI NALOGI

Ključne besede: matematika, teorija števil, desetiški številski sestav, lastnosti števil.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/27/1416-Grasselli.pdf

OB NEKI NALOGI

V neki zbirki matematičnih nalog beremo: Naravno število se končuje na 2; ko postaviš števko 2 z zadnjega mesta na začetek, dobiš dvakrat večje število; poišči najmanjše takšno naravno število.

Rešimo nalogo. Ker se iskano število končuje na 2, ga lahko zapišemo

$$10x + 2\,. \tag{1}$$

Tu je x naravno število, ki ga še ne poznamo; vzamemo, da ima n mest. Ko prenesemo 2 na začetek, stoji 2 na mestu $n+1$ z desne in dobimo število

$$2 \cdot 10^n + x\,. \tag{2}$$

To število je po pogojih naloge dvakrat večje od prvotnega; torej je

$$2 \cdot 10^n + x = 2(10x + 2)$$

in od tod

$$19x = 2(10^n - 2)\,. \tag{3}$$

Tej enačbi mora ustrezati neznano število x; ko smo ga našli, po (1) pridemo do iskanega števila.

Ker naj bo x naravno število, iz (3) vidimo, da 19 deli $2(10^n - 2)$; toda število 19 je tuje 2, zato mora deliti $10^n - 2$. Treba je torej najti najmanjši n, pri katerem 19 deli $10^n - 2$.

Ravnamo lahko tako, da po vrsti jemljemo $n = 1, 2, 3, \ldots$ in gledamo, katero izmed števil $10 - 2$, $10^2 - 2$, $10^3 - 2, \ldots$ je prvo deljivo z 19. (Če naj bo naloga rešljiva, se mora to prej ali slej zgoditi.) Ko smo naleteli na takšno število, iz (3) izračunamo x in naredimo število (1). S preizkusom preverimo, ali tako dobljeno število izpolnjuje zahteve naloge.

Iskanje najmanjšega n, pri katerem 19 deli $10^n - 2$, si moremo olajšati. Če namreč 19 deli $10^n - 2$, velja

$$\frac{10^n - 2}{19} = s$$

pri naravnem številu s in je potem

$$10^n = 19s + 2\,.$$

Dobljena enakost pove, da pušča 10^n pri delitvi z 19 ostanek 2.

Sedaj se naslonimo na preprosto opazko. Pri vsakem celem številu c obstajata celi števili k in r tako, da je

$$c = 19k + r \qquad \text{in} \qquad |r| \leq 9\,. \tag{4}$$

Npr.

$$\begin{aligned} 10 &= 19 \cdot 1 - 9 && \text{in} \quad |-9| = 9 \\ -90 &= 19(-5) + 5 && \text{in} \qquad 5 < 9 \end{aligned}$$

Število k in ostanek r v (4) dobimo, ko delimo c z 19; delitev izvršimo tako, da je r po absolutni vrednosti najmanjši možni ostanek.

Če je j naravno število, za 10^j iz (4) izhaja

$$10^j = 19k + r \quad \text{in} \quad |r| \leq 9\,. \tag{5}$$

Po množenju z 10 od tod sledi

$$10^{j+1} = 190k + 10r \quad \text{in} \quad |10r| \leq 90\,. \tag{6}$$

Prvi sumand na desni je deljiv z 19; zato daje 10^{j+1} pri delitvi z 19 enak najmanjši absolutni ostanek kot $10r$; ker pa je število $10r$ v primerjavi z 10^{j+1} majhno, njegov ostanek pri delitvi z 19 hitreje najdemo.

Vpeljimo namesto (5) okrajšani zapis

$$10^j \equiv r \pmod{19}; \quad |r| \leq 9\,, \tag{7}$$

ki pomeni, da daje 10^j pri delitvi z 19 ostanek r. Enako imamo potem iz (6)

$$10^{j+1} \equiv 10r \pmod{19}; \quad |r| \leq 9\,. \tag{8}$$

Ko smo pri kakšnem j izračunali r v (7), je po (8) ostanek za $10r$ pri delitvi z 19 isti kot ostanek za 10^{j+1}. Začenši z $j = 1$ večamo j po naravnih številih, dokler ne pridemo do ostanka 2. Račun poteka takole:

$$\begin{array}{ll} 10 \equiv -9 \pmod{19} & 10^6 \equiv 30 \equiv -8 \pmod{19} \\ 10^2 \equiv -90 \equiv 5 \pmod{19} & 10^7 \equiv -80 \equiv -4 \pmod{19} \\ 10^3 \equiv 50 \equiv -7 \pmod{19} & 10^8 \equiv -40 \equiv -2 \pmod{19} \\ 10^4 \equiv -70 \equiv 6 \pmod{19} & 10^9 \equiv -20 \equiv -1 \pmod{19} \\ 10^5 \equiv 60 \equiv 3 \pmod{19} & \end{array} \tag{9}$$

Nadaljnjih potenc ne bomo računali. Iz zadnjih dveh relacij je namreč

$$10^8 = 19k - 2 \quad \text{in} \quad 10^9 = 19k_1 - 1$$

pri celih številih k, k_1. Po zmnožitvi je zato

$$10^{17} = 19k_2 + 2$$

pri celem številu k_2 in zato

$$10^{17} \equiv 2 \pmod{19}\,. \tag{10}$$

Na isti način vidimo, da smemo zadnjo relacijo v (9) množiti s prvo, drugo, in tako naprej do sedme in pri tem ne dobimo ostanka 2. Zato je 17 res najmanjši naravni eksponent, ko drži (10).

Vrnemo se k (3) in izračunamo kvocient

$$\frac{10^{17} - 2}{19} = 5\,263\,157\,894\,736\,842\,.$$

Po množitvi z 2 dobimo

$$x = 10\,526\,315\,789\,473\,684$$

in po (2) imamo

$$10x + 2 = 105\,263\,157\,894\,736\,842\,. \tag{11}$$

Ko prenesemo 2 na začetek, je res

$$210\,526\,315\,789\,473\,684 = 105\,263\,157\,894\,736\,842 \cdot 2\,.$$

Število, ki smo ga iskali, je osemnajstmestno in je podano v (11).

Še pripomba. Naredimo 36-mestno število m tako, da za številom (11) njegove števke še enkrat zapišemo v istem redu. Ko števko 2 s konca postavimo na začetek, ima dobljeno število vrednost $2m$. (Preveri!) Če števke iz (11) ponovimo trikrat, štirikrat in tako naprej, dobimo neskončno naravnih števil, ki se končujejo na 2 in dajo dvakratnik izhodnega števila, ko postavimo 2 na začetek. Kakšnih drugih naravnih števil s to lastnostjo ni.

Ko smo nalogo rešili, se zastavljajo razna vprašanja.

Kaj je, če namesto 2 vzamemo katero od števk $a = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$? Ali tudi sedaj obstaja takšno najmanjše naravno število, da ob premestitvi števke a s konca na začetek dobimo a-krat večje število?

Iskano število ima sedaj obliko

$$10x + a\,. \tag{12}$$

Namesto števila (2) nastopa število

$$a \cdot 10^n + x \tag{13}$$

in namesto enačbe (3) enačba

$$(10a - 1)x = a(10^n - a)\,. \tag{14}$$

Tej enačbi mora x ustrezati, če naj število z zahtevano lastnostjo sploh obstaja. Ker sta števili $10a - 1$ in a tuji, mora $10a - 1$ deliti $10^n - a$. Treba je torej najti najmanjši n z lastnostjo

$$10^n \equiv a \pmod{(10a - 1)}\,. \tag{15}$$

Za zgled obravnavajmo $a = 4$. Iz (14) dobimo

$$39x = 4(10^n - 4) \tag{16}$$

in (15) preide v

$$10^n \equiv 4 \pmod{39}\,. \tag{17}$$

Za potence števila 10 računamo najmanjše absolutne ostanke pri delitvi z 39; podobno kot v (9) najdemo

$$\begin{aligned}
10 &\equiv 10 \pmod{39}\\
10^2 &\equiv 100 \equiv -17 \pmod{39}\\
10^3 &\equiv -170 \equiv -14 \pmod{39}\\
10^4 &\equiv -140 \equiv 16 \pmod{39}\\
10^5 &\equiv 160 \equiv 4 \pmod{39}
\end{aligned}$$

Najmanjši n v (16) in (17) je torej $n = 5$. Iz (16) je

$$x = \frac{4(10^5 - 4)}{39} = 4 \cdot 2\,564 = 10\,256$$

in zaradi (12) dalje

$$10x + 4 = 102\,564\,. \tag{18}$$

To število res izpolni zahtevo, saj je

$$410\,256 = 102\,564 \cdot 4\,.$$

Če ponovimo števke števila (18) dvakrat, trikrat in tako naprej, pridemo do vseh naravnih števil, ki pri prenosu števke 4 na začetek dajejo štirikratnik prvotne vrednosti.

Ko vzamemo $a = 8$, najdemo iz (14) in (15) najmanjše naravno število

$$1\,012\,658\,227\,848\,, \tag{19}$$

ki pri prestavitvi števke 8 na prvo mesto daje osemkrat večje število; saj je

$$8\,101\,265\,822\,784 = 1\,012\,658\,227\,848 \cdot 8\,.$$

S ponavljanjem skupine števk iz (19) dobimo vsa naravna števila, ki se tako obnašajo.

Tudi za $a = 3, 5, 6, 7, 9$ rešitev obstaja. Do nje pridemo iz (15) in (14) na isti način kot v zgornjih primerih. Za vsako od teh števk pa so najmanjša števila, ustrezajoča naši zahtevi, že precej velika. Navedimo jih po vrsti

$$\begin{aligned}
t &= 1\,034\,482\,758\,620\,689\,655\,172\,413\,793\\
u &= 102\,040\,816\,326\,530\,612\,244\,897\,959\,183\,673\,469\,387\,755\\
v &= 1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966\\
y &= 1\,014\,492\,753\,623\,188\,405\,797\\
z &= 10\,112\,359\,550\,561\,797\,752\,808\,988\,764\,044\,943\,820\,224\,719
\end{aligned} \tag{20}$$

Po premestitvi zadnje števke na prvo mesto dobimo vsakič tolikokrat večje število, kot pove prenesena števka; torej $3t$, $5u$, $6v$, $7y$, $9z$. Res je npr.

$$7\,101\,449\,275\,362\,318\,840\,579 = 7y\,.$$

Poleg števil t, u, v, y, z obstaja še neskončno od njih večjih števil, ki se pri prenosu zadnje števke na začetek obnašajo tako kot t, u, v, y, z. Do njih pridemo, ko v posameznem od števil (20) ves sklop števk ponavljamo.

Ugotovili smo, da zmeraj obstajajo števila, ki s prestavitvijo zadnje števke $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ na začetek preidejo v a-kratnik prvotne vrednosti. Kaj pa je, če prenesemo več kot eno števko s konca števila na začetek števila?

Če se število končuje z 10, ima obliko $100x + 10$, kjer je x naravno število z n mesti; število $100x + 10$ ima tako $n + 2$ mest. Ko postavimo 10 na začetek, smo pri številu $10^{n+1} + x$, ki ima seveda še zmeraj $n + 2$ mest. Toda z 10 pomnoženo število $100x + 10$ je $10(100x + 10)$; ker ima $n + 3$ mest, ne more biti enako $10^{n+1} + x$. Podobno velja v drugih primerih. Ko torej prestavimo sklop dveh ali več števk s konca števila na njegov začetek, nikoli ne dobimo števila, ki bi bilo enako prvotnemu številu pomnoženem s številom, ki ga določajo prestavljene števke.

Jože Grasselli

ŠTEVILSKI UGANKI – Rešitev s str. 226

S prvo nalogo hitro opravimo, pri drugi je nekaj več dela z iskanjem števil v zadnjih dveh vrsticah. Obe nalogi sta rešljivi enolično. Za enoličnost rešitve druge naloge je odločilen trimestni rezultat računa v tretji vodoravni vrstici. Če bi bil ta rezultat dvomesten, bi dobili kar devet različnih rešitev.

a)

$$81 : 9 \times 11 = 99$$
$$8 + 9 + 3 = 20$$
$$10 \times 2 - 3 = 17$$

$$99 + 20 + 17 = 136$$

b)

$$21 : 3 \times 12 = 84$$
$$49 : 7 \times 2 = 14$$
$$22 \times 8 - 75 = 101$$

$$92 + 18 + 89 = 199$$

Marija Vencelj