

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 27 (1999/2000)

Številka 4

Strani 200-205

Ivan Vidav:

## O ŠTEVILIH, KI JIH LAHKO ZAPIŠEMO S SAMIMI ENAKIMI ŠTEVKAMI

Ključne besede: matematika, teorija števil, številski sestavi.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/27/1406-Vidav.pdf>

© 2000 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## O ŠTEVILIH, KI JIH LAHKO ZAPIŠEMO S SAMIMI ENAKIMI ŠTEVKAMI

Če bi naleteli na enakost

$$55^2 = 4444, \quad (1)$$

bi bila prva misel ta, da ni pravilna, ker je leva stran kvadrat lihega števila 55, se pravi liho število, desna stran pa je sodo število. Kaj pa, če števila niso zapisana v običajnem desetiškem številskem sestavu in se nam zdi račun zato napačen? Vsak bralec bo zlahka odkril, da enakost (1) velja v sestavu z osnovo 7. V tem sestavu pomeni 55 število  $5 \cdot 7 + 5 = 40$ , desna stran 4444 pa število

$$4 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 4 = 1600.$$

Res je  $40^2 = 1600$ .

Število 40 ima, zapisano v sestavu z osnovo 7, enaki števkami. Njegov kvadrat 1600 pa se v istem sestavu spet izraža s samimi enakimi števki, in sicer štirimi. Ali obstaja morda še kakšno drugo naravno število, ki se da v primerno izbranem sestavu zapisati z dvema enakima števki, njegov kvadrat pa s štirimi enakimi števki? Odgovor na to vprašanje dajejo rešitve enačbe

$$aa_{(r)}^2 = bbbb_{(r)}. \quad (2)$$

Indeks ( $r$ ) pove, da velja ta račun v številskem sestavu z osnovo  $r$ . Iskano število smo zapisali v tem sestavu z enakima števki  $a$ , njegov kvadrat pa s štirimi enakimi števki  $b$ . Na koliko načinov lahko izberemo osnovo  $r$  ter števkami  $a$  in  $b$ , da velja enačba (2)? Ugotovili bomo, da je rešitev nešteto, toda v nekem smislu je rešitev ena sama, namreč tista, podana z enakostjo (1).

Osnova številskega sestava je lahko katerokoli naravno število  $r > 1$ , števk pa so znaki za števila od 0 do  $r - 1$ . V enačbi (2) ne sme biti  $a = 0$ , saj  $aa$  pri  $a = 0$  ni dvomestno število (temveč  $= 0$ ). Prav tako ni  $b = 0$ . Zato veljajo ocene

$$r > 1, \quad 1 \leq a \leq r - 1 \quad \text{in} \quad 1 \leq b \leq r - 1. \quad (3)$$

Ker pomeni  $aa$  v sestavu z osnovo  $r$  število  $ar + a = a(r + 1)$ ,  $bbbb$  pa število

$$br^3 + br^2 + br + b = b(r^3 + r^2 + r + 1) = b(r + 1)(r^2 + 1),$$

lahko zapišemo enačbo (2) v obliki

$$a^2(r+1)^2 = b(r+1)(r^2+1). \quad (4)$$

Iščemo tiste rešitve te enačbe v naravnih številih  $a, b, r$ , ki zadoščajo pogojem (3).

*Pripomba.* V enačbi (2) pomenita  $a$  in  $b$  števki, v (4) pa pripadajoči naravni števili.

Iz (4) izračunamo

$$b = \frac{a^2(r+1)}{r^2+1}. \quad (4^*)$$

Ker je  $b$  naravno število, mora biti produkt  $a^2(r+1)$  v števcu ulomka na desni deljiv z imenovalcem  $r^2+1$ . Enakost

$$r^2+1 = (r+1)^2 - 2r$$

pove, da imata  $r+1$  in  $r^2+1$  kvečjemu skupni faktor 2 (števili  $r$  in  $r+1$  sta si namreč tuji). Zato sta samo dve možnosti:

a) Največji skupni delitelj števil  $r+1$  in  $r^2+1$  je 1. Iz enačbe (4\*) izhaja, da je v tem primeru  $a^2$  deljiv z  $r^2+1$ , torej  $a^2 = k(r^2+1)$ , kjer je  $k$  celo število. Potem je  $b = k(r+1)$  in velja, ker je  $k \geq 1$ , ocena  $b \geq r+1 > r$ , tako da tretji pogoj (3) ni izpolnjen. Rešitve potemtakem ni.

b)  $r+1$  in  $r^2+1$  imata največji skupni delitelj 2 (to je očitno tedaj, kadar je  $r$  lih). Ker je zdaj faktor  $r+1$  v števcu na desni strani enačbe (4\*) deljiv z 2, toda z nobenim drugim faktorjem imenovalca  $r^2+1$ , mora biti faktor  $a^2$  deljiv z  $(r^2+1)/2$ , tako da je kvocient med  $a^2$  in  $(r^2+1)/2$  (le-ta je enak ulomku  $2a^2/(r^2+1)$ ) celo število, ki ga zaznamujmo s  $h$ . Zdaj dobimo  $b = h \frac{r+1}{2}$ . Če bi bil  $h \geq 2$ , bi veljala ocena  $b \geq r+1 > r$ , ki je v nasprotju s tretjim pogojem (3). Zato mora biti  $h = 1$ , se pravi

$$b = \frac{r+1}{2} < r.$$

Ker je  $h = 1$ , imamo enakost  $2a^2/(r^2+1) = 1$ , ki jo zapišimo v obliki

$$2a^2 - r^2 = 1. \quad (5)$$

Zanimajo nas rešitve te enačbe v naravnih številih  $a$  in  $r$ . Najpreprostejša  $a = 1$ ,  $r = 1$  ne pride v poštev, ker ni izpolnjen pogoj  $r > 1$ . Če pa je  $a, r$

taka rešitev v naravnih številih, pri katerih je  $r > 1$ , izračunamo iz (5), da je v tem primeru

$$a = \sqrt{\frac{r^2 + 1}{2}} < r.$$

Torej so vsi pogoji (3) izpolnjeni. Tako smo ugotovili:

*Enakost (2) velja natanko tedaj, kadar sta naravni števili  $a$  in  $r > 1$  rešitvi enačbe (5). Pripadajoči  $b$  pa je enak  $(r + 1)/2$ .*

Koliko rešitev ima enačba (5) v naravnih številih  $a$  in  $r$ ? Če ustrezata  $a$  in  $r$  tej enačbi, velja isto za števili

$$a' = 3a + 2r \quad \text{in} \quad r' = 4a + 3r. \quad (6)$$

S preprostim računom namreč ugotovimo, da je

$$2a'^2 - r'^2 = 2(3a + 2r)^2 - (4a + 3r)^2 = 2a^2 - r^2 = 1.$$

Očitno sta  $a'$  in  $r'$  naravni števili, če sta taki  $a$  in  $r$ . Veljata tudi oceni  $a' > a$  in  $r' > r$ . Rešitev  $a = 1$ ,  $r = 1$  nam da  $a' = 5$ ,  $r' = 7$  in  $b' = 4$ . Če zdaj vstavimo  $a = 5$  in  $r = 7$  v (6), izračunamo  $a' = 29$ ,  $r' = 41$  in  $b' = 21$ . Tako lahko nadaljujemo. Dobimo neskončno naraščajoče zaporedje rešitev enačbe (5). Brez dokaza povejmo, da so v tem zaporedju zajete prav vse njene rešitve v naravnih številih  $a$  in  $r$ .

Torej obstaja neskončno naravnih števil, ki jih lahko zapišemo v primerno izbrani osnovi z dvema enakima števčkama, njihov kvadrat pa s štirimi enakimi števčkami. Rešitvi  $a = 5$ ,  $r = 7$ ,  $b = 4$  pripada najmanjše tako število, namreč  $ar + a = 5 \cdot 7 + 5 = 40$ , ki nam da enakost (1). Naslednja rešitev  $a = 29$ ,  $r = 41$ ,  $b = 21$  določa število  $ar + a = 29 \cdot 41 + 29 = 1218$ . V sestavu z osnovo  $r = 41$  potrebujemo 41 znakov (števčk) za označitev števil od 0 do 40. Za prvih deset naravnih števil lahko obdržimo običajne številke 0, 1, ..., 9, za nadaljnja, med njimi za  $a = 29$  in  $b = 21$ , pa potrebujemo nove znake. Izberimo npr. znak  $\Delta$  za 29 in znak  $\square$  za 21. Število 1218 zapišemo potem v sestavu z osnovo  $r = 41$  v obliki  $\Delta\Delta$ . Enakost (2), ki pripada drugi rešitvi enačbe (5), pa se glasi

$$\Delta\Delta^2 = \square\square\square\square.$$

Te enakosti pa seveda ne bi mogli zamenjati za račun v desetiškem sestavu. Pri nadaljnjih rešitvah je  $a > 29$  in  $b > 21$ , tako da vselej potrebujemo

novi števkki za  $a$  in  $b$ . Zato je enakost (1) edina rešitev enačbe (2), ki jo lahko zapišemo samo s števki desetiškega sistema.

Enačba (2) je poseben primer splošnejše enačbe

$$\underbrace{aa \dots a}_{n(r)}^2 = \underbrace{bb \dots b}_{m(r)}, \quad (7)$$

ki naj velja v sestavi z osnovo  $(r)$ . Število, ki ga kvadriramo, se v njem zapiše z  $n$  enakimi števki  $a$ , njegov kvadrat pa z  $m$  enakimi števki  $b$ .

Primer  $n = 1$  ni zanimiv, rešitev je tedaj nešteto in jih zlahka najdemo: Za  $a$  vzamemo poljubno naravno število, postavimo  $b = a^2$ , za osnovo  $r$  pa izberemo katerikoli naravno število, ki je večje od  $b$ . Zato bomo odslej privzeli, da je  $n > 1$ .

Ker je

$$\underbrace{aa \dots a}_{n(r)} = ar^{n-1} + ar^{n-2} \dots + a \quad \text{in} \quad \underbrace{bb \dots b}_{m(r)} = br^{m-1} + br^{m-2} \dots + b,$$

lahko zapišemo enačbo (7) v obliki

$$a^2(r^{n-1} + r^{n-2} \dots + 1)^2 = b(r^{m-1} + r^{m-2} \dots + 1). \quad (8)$$

Naravna števila  $a, b$  in  $r$  morajo ustrezati tej enačbi, hkrati pa tudi pogojem (3).

Iz ocen  $1 \leq a$  in  $b \leq r - 1$  izpeljemo najprej tole zaporedje neenačb

$$\begin{aligned} r^{2n-2} &< (r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1)^2 \leq a^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1)^2 = \\ &= b(r^{m-1} + r^{m-2} + \dots + 1) \leq (r-1)(r^{m-1} + r^{m-2} + \dots + 1) = r^m - 1 < r^m. \end{aligned}$$

Tu smo upoštevali enačbo (8) in identiteto

$$(r-1)(r^{m-1} + r^{m-2} + \dots + 1) = r^m - 1.$$

Ker je osnova  $r > 1$ , vidimo, da mora biti eksponent  $2n - 2$  pri potenci števila  $r$  na začetku teh neenačb manjši od eksponenta  $m$  pri  $r$  na koncu, se pravi  $2n - 2 < m$ .

Podobno nam dasta pogoja  $r - 1 \geq a$  in  $b \geq 1$  zaporedje neenačb

$$\begin{aligned} r^{2n} &> (r^n - 1)^2 = (r-1)^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1)^2 \geq \\ &\geq a^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1)^2 = b(r^{m-1} + r^{m-2} + \dots + 1) \geq \\ &\geq r^{m-1} + r^{m-2} + \dots + 1 > r^{m-1}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je  $2n > m - 1$ . Potemtakem leži  $m$  v tehle mejah

$$2n - 2 < m < 2n + 1.$$

Ker sta  $m$  in  $n$  naravni števili, imamo samo dve možnosti: ali je  $m = 2n - 1$  ali pa  $m = 2n$ . Oglejmo si obe po vrsti.

a) Če je  $m = 2n - 1$ , dobimo iz enačbe (8)

$$b = \frac{a^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1)^2}{r^{2n-2} + r^{2n-3} + \dots + 1}. \quad (8^*)$$

Ker je  $b$  celo število, je števec v ulomku na desni deljiv z imenovalcem. Identiteta

$$r^{2n-2} + r^{2n-3} + \dots + 1 = (r^{n-1} + 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1) - r^{n-1}$$

pove, da števili  $r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1$  in  $r^{2n-2} + r^{2n-3} + \dots + 1$  nimata od 1 različnega skupnega delitelja (s skupnim deliteljem bi moral biti deljiv tudi  $r^{n-1}$ , toda števili  $r^{n-1}$  in  $r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1$  sta si očitno tuji). Od tod sklepamo, da je  $a^2$  deljiv z imenovalcem  $r^{2n-2} + r^{2n-3} + \dots + 1$ , torej kvocient  $a^2 / (r^{2n-2} + r^{2n-3} + \dots + 1)$  je neko celo število  $k \geq 1$ . Potem je

$$b = k(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1)^2 > r^{2n-2}.$$

Ker je  $n > 1$ , sledi od tod, da je  $b > r$ . Potemtakem tretji pogoj (3) ni izpolnjen in zato ne more biti  $m$  enak  $2n - 1$ .

b) Naj bo zdaj  $m = 2n$ . Ker je

$$r^{2n-1} + r^{2n-2} + \dots + 1 = (r^n + 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1),$$

dobimo iz (8)

$$b = \frac{a^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1)}{r^n + 1}. \quad (8^{**})$$

Ker smo primer, ko je  $n = 2$  in  $m = 2n = 4$ , obravnavali že na začetku, naj bo odslej  $n > 2$ . Iz identitete

$$r^n + 1 = r^n - 1 + 2 = (r - 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1) + 2$$

razberemo, da imata števili  $r^n + 1$  in  $r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1$  kvečjemu skupni delitelj 2. Če je največji skupni delitelj 1, sta si tuji in je zato kvocient  $a^2 / (r^n + 1)$  neko celo število  $k$ . Če pa je največji skupni delitelj enak 2,

je kvocient  $2a^2/(r^n + 1)$  celo število, ki ga imenujmo  $h$ . V prvem primeru dobimo iz (8\*\*)

$$b = k(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1) \geq r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1 > r,$$

v drugem pa

$$b = h \frac{r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1}{2} \geq \frac{r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1}{2} > \frac{r^{n-1}}{2} \geq r.$$

(Upoštevali smo, da je  $k \geq 1$ ,  $h \geq 1$ ,  $n > 2$  in  $r \geq 2$ .) Spet ni izpolnjen tretji pogoj (3), tako da enačba (7) tudi pri  $m = 2n$  nima nobene rešitve v naravnih številih, če je  $n > 2$ .

Povzemimo, kar smo dognali:

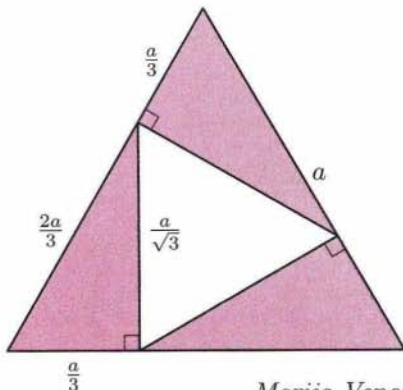
Enačba (7) je rešljiva z naravnimi števili  $a$ ,  $b$  in  $r$  pri  $n > 1$  le tedaj, kadar je  $n = 2$  in  $m = 4$ . V tem primeru preide v enačbo (2), ki premore, kakor smo videli, nešteto rešitev.

Še tole naj omenimo: Enačba (5) nima rešitve v celih številih, pri kateri bi bil  $r = 10$  ( $r$  je vselej lih). Zato v desetškem sestavu nikoli ne velja enakost oblike (7), če je  $n \geq 2$ . Pri  $n = 1$  pa so te rešitve:  $1^2 = 1$ ,  $2^2 = 4$  in  $3^2 = 9$ .

Ivan Vidav

## ENAKOSTRANIČNA TRIKOTNIKA – Rešitev s str. 131

Naloga je bila namenjena najmlajšim bralcem. Pot do rešitve je razvidna z desne slike, kjer smo z  $a$  označili stranico večjega enakostraničnega trikotnika. Obarvani pravokotni trikotniki so med seboj skladni in so polovice enakostraničnih trikotnikov. Preprost račun pokaže, da je ploščina manjšega enakostraničnega trikotnika (neobarvani del) enaka tretjini ploščine večjega trikotnika.



Marija Vencelj