PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **27** (1999/2000)
Številka 3
Strani 142–145

Janez Strnad:

KAKO HITRO SO SE GIBALI DINOZAVRI?

Ključne besede: fizika, mehanika, hoja, dinamična podobnost, Froudovo število, gibanje vretenčarjev.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/27/1395-Strnad.pdf

KAKO HITRO SO SE GIBALI DINOZAVRI?

V filmu Jurski park, ki je pred leti zbudil precej pozornosti, je bilo mogoče videti razne vrste plazilcev v gibanju, čeprav so že zdavnaj izumrli. Paleontologi so izkopali njihove kosti in jih sestavili v okostja ter skupaj z zoologi rekonstruirali živali vse do zunanje podobe. Kako hitro so se živali gibale, pa so jim pomagali ugotoviti fiziki.

Začnimo s kar se da preprostim zgledom, z nihalom, pri katerem je na zelo lahek drog z dolžino l_1 obešena drobna utež. Drog je vrtljiv okoli vodoravne osi skozi krajišče. Nihalo sinusno zaniha, ko ga za majhen kot φ_{01} izmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo. Drugo nihalo z dolžino l_2, ki naj bo enako sestavljeno, izmaknimo za kot φ_{02} iz ravnovesne lege in spustimo. Ali lahko dosežemo, da se nihali *gibljeta podobno*? Ali lahko v vsakem trenutku po odklonu prvega nihala sklepamo na odklon drugega? Najprej je jasno, da moramo čas prvega nihala t_1 in čas drugega nihala t_2 začeti meriti v ustreznih trenutkih, npr., ko prvo in drugo nihalo spustimo iz začetne lege. Poleg tega morata biti oba začetna odklona enaka: $\varphi_{01} = \varphi_{02}$. Časa t_2 in t_1 sta v razmerju nihajnih časov $t_2/t_1 = (g_1 l_2/g_2 l_1)^{1/2}$. Pri tem smo upoštevali možnost, da prvo nihalo niha na Zemlji s pospeškom prostega pada g_1 in drugo na Luni s pospeškom prostega pada g_2. Hitrosti obeh uteži sta v razmerju največjih hitrosti $v_2/v_1 = (g_2 l_2/g_1 l_1)^{1/2}$. Iz zveze razberemo, da je pri primerjanju pomembna količina v^2/gl. Količino z enoto 1 imenujejo *Froudovo število*. Gibanji nihal sta v navedenem smislu podobni, če sta njuni Froudovi števili enaki. Iz zveze $v_2^2/g_2 l_2 = v_1^2/g_1 l_1$ sledi za nihali na Zemlji $v_2^2/v_1^2 = l_2/l_1$. Za enako dolgi nihali na Luni in Zemlji pa velja $v_2^2/v_1^2 = g_2/g_1$.

Poskusimo na hitro z enačbami izpolniti vrzeli v prejšnjem razmišljanju. Nihanje nihala opišemo z enačbo $\varphi = \varphi_0 \cos (g/l)^{1/2} t$, če začnemo meriti čas v trenutku, ko nihalo doseže največji odklon. Razmerje odklonov dveh nihal je

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\varphi_{02} \cos (g_2/l_2)^{1/2} t_2}{\varphi_{01} \cos (g_1/l_1)^{1/2} t_1} .$$

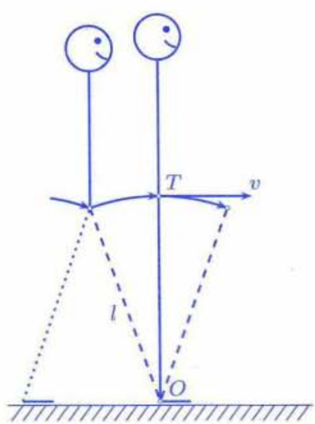
Iz enačbe razberemo, da velja $\varphi_2 = \varphi_1$, če velja $(g_2/l_2)^{1/2} t_2 = (g_1/l_1)_1^{1/2}$ in $\varphi_{02} = \varphi_{01}$. Hitrost krajišča nihala dobimo tako, da hitrost spreminjanja kota pomnožimo z dolžino nihala, npr. $v_2 = -(g_2 l_2)^{1/2} \varphi_{02} \sin (g_2/l_2)^{1/2} t_2$.

Ne pozabimo, da smo se omejili na nihanje z majhnim odklonom, pri katerem nihajni čas ni odvisen od največjega odklona. Tu moramo odnehati, če ne želimo zadeve preveč zaplesti.

Tako smo razkrili začetek zanimivega dela mehanike, *dinamično podobnost*, ki jo imamo lahko za razširitev *geometrijske podobnosti*. Lika sta geometrijsko podobna, če enega prevedemo v drugega, ko dolžino vsake od vsebovanih daljic pomnožimo z določenim številom. Med seboj podobna lika imata paroma enake ustrezne kote. Gibanji dveh geometrijsko podobnih sistemov sta dinamično podobni, če lahko eno prevedemo v drugo tako, da pomnožimo razsežnosti enega sistema z določenim številom, čase z drugim številom in sile s tretjim številom. Silo smo preračunali na maso, kar je dalo pospešek, in se omejili na težo.

Dinamična podobnost je pomembna v primeru, da delamo načrt za kako napravo, pa smo negotovi o tem, kako bo delovala. Tedaj izdelamo veliko cenejši pomanjšani model naprave in ga preskusimo. Razmere, v katerih bi delovala velika naprava, morajo ustrezati razmeram, v katerih deluje model. Tu pride na pomoč diamična podobnost. Zagotovimo, npr., da je Froudovo število za model enako Froudovemu številu za napravo, in primerjamo čase, hitrosti, sile, kakor smo nakazali.

Dinamično podobnost je vpeljal angleški inženir William Froude (izgovori frud), ki je živel v letih od 1810 do 1879. Zanimal se je za gibanje ladij in izumil več merilnih naprav. Število, ki so ga pozneje imenovali po njem, je enako razmerju med dvojno kinetično energijo in spremembo potencialne energije $2 \cdot \frac{1}{2}mv^2/mgl$ ter je povezano z razmerjem med silo zaradi pospeševanja in težo.



Slika 1. Skrajno poenostavljen model hoje. Težišče T postavimo v vrh nog, O je os v stopalu na tleh.

V naslednjem koraku skrajno poenostavljeno obdelamo hojo človeka. (Podrobneje jo je obravnaval P. Gosar v članku *Mehanika hoje in teka*, Presek **13** (1985/86) 81.) Težišče človeka z dolžino nog l se spusti po krogu s polmerom l s središčem v stopalu na tleh, ko doseže najvišjo točko (slika 1). Hitrost je povezana z radialnim pospeškom v^2/l, ki je značilen za gibanje po krogu. Pospešek ne more preseči težnega pospeška g, če stopalo miruje na tleh. Tedaj velja

$$\frac{v^2}{l} \leq g \qquad \text{ali} \qquad \frac{v^2}{lg} \leq 1\,.$$

Tudi za hojo je pomembno Froudovo število.

Po zapisani neenačbi človek ne more hoditi s hitrostjo, večjo od $(gl)^{1/2}$. Pri dolžini nog $l = 0,9$ m je to 3 m/s. Večjo hitrost doseže v teku. Tu na kratko omenimo merjenja porabe kisika pri hoji in pri teku. Človek dobiva energijo, potrebno za dvigovanje težišča pri hoji in teku s kemijskimi reakcijami v mišicah. Pri tem se razgrajujejo ogljikovi hidrati, beljakovine in maščobe, za kar je potreben kisik. Poraba kisika na časovno enoto zato določa moč človeka. (Nekaj povesta o tem članka A. Likar, *Tek in moč*, Presek **25** (1997/98) 226 in J. Strnad, *Človeška moč*, Presek **26** (1998/99) 2.) Merjenja so pokazala, da je poraba kisika pri hitrosti do 2 m/s pri hoji manjša kot pri teku, pri večji hitrosti pa manjša pri teku kot pri hoji. Pod hitrostjo 2 m/s je potemtakem energijsko ugodnejša hoja, nad njo pa tek.

V svojem razglabljanju smo se omejili na gibanje težišča po krogu s središčem v stopalu na tleh. Tekmovalci v hitri hoji dvigajo in spuščajo boke ter dosežejo pri hoji večjo hitrost, npr. 4,4 m/s pri svetovnem rekordu v hoji na 10 km.

Mejna hitrost je pri otrocih s krajšimi nogami manjša, na primer 2 m/s pri dolžini nog 0,4 m. Zato lahko otrok hodi le ob odraslem, ki namenoma upočasni korak. Na Luni je težni pospešek 1,6 m/s^2 in je mejna hitrost samo 1,2 m/s. Vesoljci so zato na Luni poskakovali.

Vretenčarji natančno vzeto drug drugemu niso geometrijsko podobni. Konj, npr., ni povečan pes. Vendar njihovo gibanje kaže dovolj skupnih značilnosti, da vse vretenčarje poskusimo obravnavati kot približno geometrijsko podobne in njihova gibanja kot približno dinamično podobna. Opazovanja to približno podpirajo. Pri Froudovem številu okoli $\frac{1}{2}$ pri vseh vretenčarjih hoja preide v tek. To velja za vretenčarje z enim ali z dvema paroma nog. Pri hoji in teku se drugi par nog giblje podobno kot prvi z določeno zakasnitvijo. Gibanje obeh parov preneha biti podobno ob prehodu v galop pri Froudovem številu okoli 2,5.

Pri enakem Froudovem številu vzamemo gibanje vretenčarjev za dinamično podobno. Konj, ki ima štirikrat daljše noge kot pes, ima pri enakem Froudovem številu štirikrat daljši korak kot pes. To naj bi veljalo za vse vretenčarje, tako da bi bilo razmerje med dolžino koraka in dolžino nog za vse vretenčarje, z enim ali z dvema paroma nog, enako odvisno od Froudovega števila. Merjenja to približno potrjujejo, natančne odvisnosti pa ne moremo pričakovati.