

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 27 (1999/2000)

Številka 2

Strani 90-93

Andrej Likar:

PREPOVEDANI PAS

Ključne besede: fizika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/27/1393-Likar.pdf>

© 1999 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

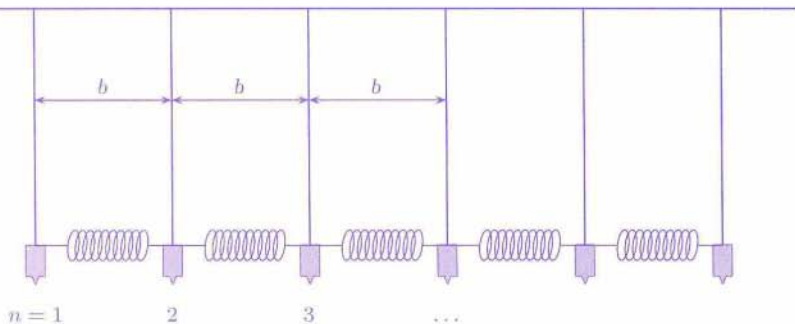
PREPOVEDANI PAS

Pri gibanju elektronov in vrzeli v polprevodnikih ne moremo mimo pojmov valenčnega, prevodnega in prepovedanega pasu. Nenavadno je, da se elektroni z energijo, ki leži v prepovedanem pasu, v kristalu ne morejo gibati. Na omejitve sicer naletimo tudi pri gibanju velikih teles. Pri gibanju planetov okrog Sonca, na primer, planet ne sme imeti prevelike energije, da ga ne odnese iz Osončja. Tudi krogla mora imeti dovolj veliko kinetično energijo, da prebije tarčo. Podobne omejitve veljajo tudi v mikrosvetu – elementarni delec mora imeti dovolj veliko kinetično energijo, da vzbudi atomsko jedro. Samo gibanje pa seveda ni nikoli prepovedano, ne glede na kinetično energijo delca. Danes se zavedamo, da za gibanje elektronov v kristalu ne veljajo vsakdanje predstave. To gibanje obravnavamo podobno kot valovanje. Frekvenca valovanja je povezana s kinetično energijo elektrona.

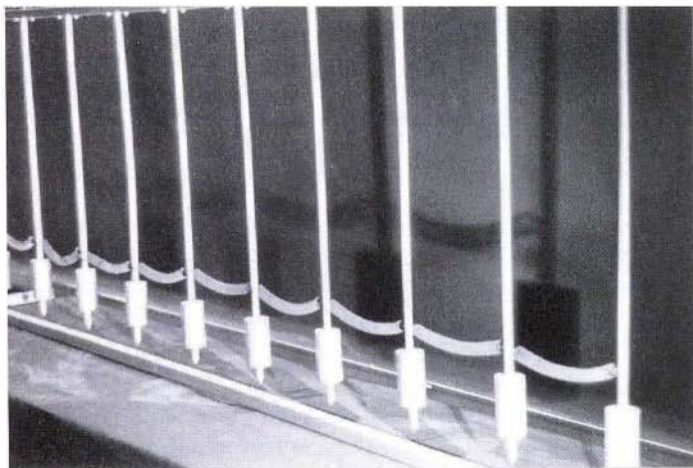
Pojavi, povezani z valovanjem, so v fiziki raznovrstni in zanimivi. V šoli spoznamo širjenje mehaničnih valov po napeti vrvi, elastičnih telesih in zraku ter tudi širjenje elektromagnetnih valov po praznem prostoru ali v prozornih snoveh. Pri nobenem od teh pa ne zasledimo prepovedanih frekvenčnih pasov. Valovna dolžina λ in frekvenca ν sta povezani z znano enačbo $\lambda\nu = c$, iz katere sledi, da sta frekvenca valovanja in valovna dolžina obratno sorazmerni. Valovanje se širi po sredstvu ali v praznem prostoru ne glede na frekvenco vzbujanja.

Pri širjenju zvoka v kristalih pa opazimo povsem nove pojave, ko je valovna dolžina zvoka primerljiva z razdaljami med sosednjimi atomi v kristalu. Ker so te frekvence izredno visoke, so tovrstni poskusi zahtevni. Zato si bomo v sestavku ogledali širjenje valovanja v verigi težnih nihali, kjer tudi naletimo na prepovedane frekvenčne pasove. Valovanje s frekvenco v prepovedanem pasu se po verigi ne more širiti.

Oglejmo si поблиže širjenje valovanja v taki verigi v upanju, da nam bo po razpravi pojem prepovedanega pasu za elektrone v polprevodniku bolj domač. Verigo nihali sestavlja niz težnih nihali, ki so v mirovni legi enakomerno vsaksebi (slika 1). Težno nihalo sestavlja utež z maso m na koncu zelo lahke, a toge palice z dolžino l . Na drugem koncu je nihalo vrtljivo pritrjeno na strop tako, da se utež lahko giblje le v levo ali v desno. V ravnovesni legi sta težišči sosednjih uteži oddaljeni za b . Sosednje uteži so med seboj povezane z lahko vzmetjo s koeficientom k . V mirovni legi so vzmeti ohlapne in ne delujejo na uteži. Verige ni težko izdelati (primer kaže slika 2).

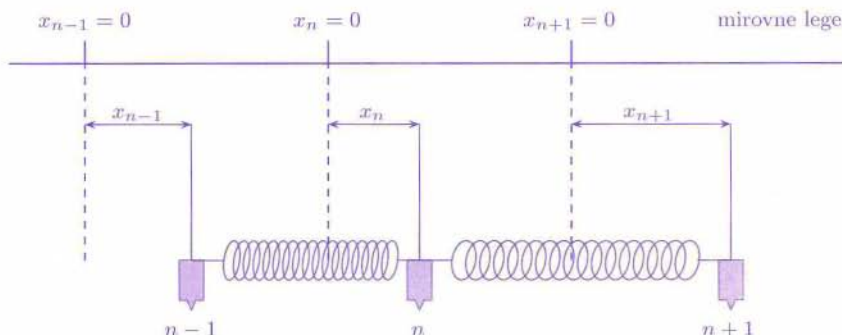


Slika 1. Veriga težnih nihal, ki so povezana z lahkimi vijačnimi vzmetmi. Veriga se začne s prvim nihalom ($n = 1$) in se nadaljuje brez konca.



Slika 2. Izdelana veriga iz povezanih nihal.

Nihala v verigi bomo sedaj vzbujali tako, da bomo začeli nihati prvo nihalo na začetku verige sinusno z izbrano frekvenco, in opazovali, kako nihajo druga nihala v verigi. Ker je izdelava take verige zamudna, saj za nazorno spremljanje dogajanja potrebujemo nekaj deset nihal, bomo širjenje valovanja spremljali na računalniškem zaslonu s sprotnim izračunavanjem leg nihal v verigi. V ta namen si oglejmo nihalo, ki je n -to po vrsti, če štejemo od začetka verige, in njegova soseda, torej nihali z oznakama $(n - 1)$ in $(n + 1)$ (slika 3). Gibanju n -tega nihala lahko sledimo, če poznamo vsoto vseh sil, ki delujejo na njegovo utež. Obravnavali bomo majhne odmike od ravnovesne lege, zato gibanje po krožnem loku



Slika 3. n -to nihalo in njegova soseda – k izpeljavi sil na nihalo v vodoravni smeri.

obravnavamo kot gibanje v vodoravni smeri. Sila palice na utež F_d je tedaj kar sorazmerna z odmikom x_n : $F_p = mg \frac{x_n}{l}$, sila desne vzmeti je $F_d = kx_{n+1} - kx_n$, leve pa $F_l = kx_n - kx_{n+1}$. Po Newtonovem zakonu, ki povezuje vsoto teh sil s pospeškom uteži v vodoravni smeri, zapišemo

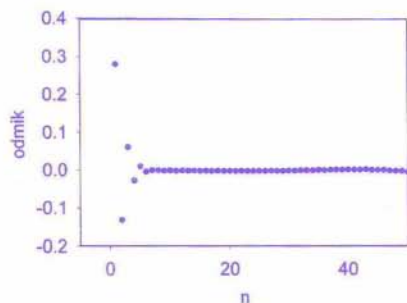
$$ma_n = F_l + F_p + F_d.$$

Iz znanega pospeška v času t bomo izračunali hitrost nihala v času $t + \Delta t$ iz enačbe $v_n(t + \Delta t) = v_n(t) + a_n \Delta t$. Odmik bomo izračunali iz enačbe $x_n(t + \Delta t) = x_n(t) + v_n(t) \Delta t + \frac{1}{2} a_n(t) (\Delta t)^2$. Obe enačbi veljata le pri enakomerno pospešenem gibanju. Če pa je časovni korak Δt dovolj majhen, je natančnost računanja kljub temu, da se pospešek spreminja, zanesljiva. Računanje bomo seveda prepustili računalniku (vključimo čim več nihala v verigi), mi pa bomo opazovali odmike v zaporednih časih. Ker so računalniki izredno hitri, najlažje opazujemo rezultate tako, da za vsak časovni korak izrišemo lege posameznih nihala v verigi na zaslon.

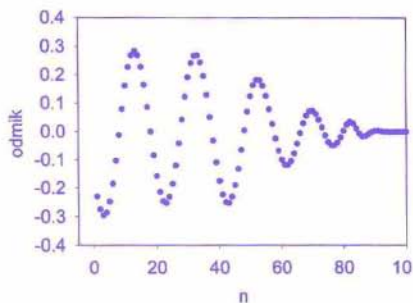
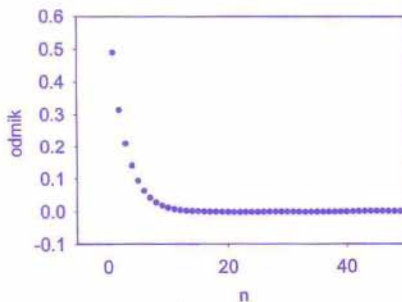
Sedaj se lotimo poskusov. Prvo nihalo naj niha sinusno z izbrano frekvenco in opazujmo gibanje ostalih nihala v verigi. S preskušanjem, še lažje pa z računom, ugotovimo, da valovanje v verigo ne prodré, če je njegova frekvenca nižja od mejne krožne frekvence $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Niha le nekaj nihala blizu prvega, ostala nihala pa se po daljšem času povsem umirijo, kljub nenehnemu vzbujanju. Na sliki 4 smo odmike nihala v izbranem trenutku risali pravokotno na verigo, da je slika preglednejša. Prav tako se nihala globlje v verigi ne zmenijo za vzbujanje, ki ima krožno frekvenco večjo od $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4k}{m}}$. Tudi tu niha le nekaj začetnih nihala (slika 5). Krožni frekvenci ω_0 in ω_1 sta meji dovoljenega pasu. Valovanje s krožno frekvenco, ki je med tema mejama, se širi po verigi. Širjenje pa

je nekoliko nenavadno, če ga primerjamo s širjenjem valovanja po napeti vrvi (slika 6). Pas frekvenc nad ω_1 je zgornji prepovedani pas, pas pod ω_0 pa spodnji prepovedani pas.

Slika 4. Trenutna lega nihala, ko verigo dlje časa vzbujamo s frekvenco v spodnjem prepovedanem pasu. Zaradi preglednosti smo odmik nihala risali pravokotno na verigo, kot da bi bilo valovanje transversalno. V resnici je longitudinalno.



Slika 5. Trenutna lega nihala, ko verigo dlje časa vzbujamo s frekvenco v zgornjem prepovedanem pasu. Slika je risana po predlogi slike 4.



Slika 6. Trenutna lega nihala, ko vzbujamo prvo nihalo s frekvenco v dovoljenem pasu. Širjenje tega valovanja nekoliko spominja na širjenje težnih valov na vodni gladini.

Pojav prepovedanih in dovoljenih pasov pri širjenju valovanja po verigi težnih nihala nekoliko osvetli pojav prepovedanih in dovoljenih energijskih pasov pri gibanju elektronov v kristalih. Razen teh pasov pa pojava nimata kake globlje stične točke, saj mehanično valovanje le v zelo grobih potezah spominja na valovanje, s katerim ponazorimo gibanje elektronov v kristalih. Včasih pa tudi oddaljene podobnosti takega pojava z mehaničnim modelom pomagajo, da nenavadna dejstva iz fizike mikrosвета lažje sprejmemo.