

## DAVID HILBERT (1862–1943) – Ob stoletnici Osnov geometrije in skorajšnji stoletnici Hilbertovih problemov

David Hilbert se je rodil leta 1862 v Königsbergu v vzhodni Prusiji. Stari oče in oče sta bila sodnika v Königsbergu, nagnjenje do matematike pa je David podedoval po svoji materi. Učenost je nabiral v rodnem Königsbergu z izjemo enega semestra univerzitetnega študija, ko je študiral v Heidelbergu. Po doktoratu 1885. leta je odšel v Leipzig in Pariz, naslednje leto pa je bil sprejet za privatnega docenta na königsberški univerzi. Leta 1892 je postal izredni in naslednje leto redni profesor na tej univerzi. V tem času se je tudi poročil s Käthe Jerosch<sup>1</sup>. Leta 1895 je dobil Hilbert katedro na univerzi v Göttingenu, kjer je ostal vse do upokojitve v letu 1930. Leta 1925 je zbolel za pogubno anemijo, ki je tisti čas veljala za neozdravljivo. Odtlej ni več zmogel delati s polno znanstveno močjo. Umrl je med drugo svetovno vojno leta 1943. Dve leti zatem je njegov Königsberg, skoraj popolnoma uničen, pod imenom Kaliningrad pripadel Rusom.

“Če bi bil slikar, bi zlahka narisal Hilbertov portret, tako močno so se mi v spomin vtisnile njegove poteze izpred štiridesetih let, ko je bil na vrhuncu svojega življenja. Še vedno vidim njegovo visoko čelo, sijoče oči, strmo zročje skozi očala, strogo, kratko poraščeno bradico, vidim celo smeli panamski klobuk na njegovi glavi. In v ušesih mi še vedno odzvanja njegov ostrí vzhodnopruski naglas ...” je v knjigi Raziskovalci in znanstveniki sodobne Evrope zapisal F. M. Levi. Takega Hilberta so se spominjali tudi drugi, ki so ga zgodaj spoznali. Tiste pa, ki so ga srečali kasneje, ko ga je že prizadela bolezen, je njegov videz globoko pretresel.



<sup>1</sup> Njun edinec Franz je pri enaindvajsetih duševno zbolel. Hilbert fantove bolezní ni najlepše sprejel. Sinu se je takorekoč odrekel in ko se je ta vrnil iz bolnišnice, je bil za očeta samo moteč dejavnik pri njegovem znanstvenem delu.

Königsberg, Hilbertovo rojstno mesto in mesto njegovega zorenja v matematika, je postalo eno od matematičnih središč v obdobju 1827–1842, ko je tam deloval Carl G. J. Jacobi. Hilbertov profesor v prvih študentskih letih je bil algebraik Heinrich Weber, Dedekindov sodelavec v teoriji algebraičnih funkcij. Leta 1883 ga je nasledil Weierstrassov učenec F. Lindemann, izvrsten, a zmeden matematik, ki je leto pred tem prvi dokazal, da je  $\pi$  transcendentno število. Pod njegovim vplivom je Hilbert začel svoje prve znanstvene raziskave v teoriji invariant. V Hilbertovih študentskih letih je v Königsbergu blestel sijajni študent matematike Hermann Minkowski, dve leti mlajši od Hilberta, a po študiju semester pred njim. Minkowski je leta 1883 prejel veliko nagrado Pariške akademije. Leta 1884 je bil za izrednega profesorja v Königsbergu nastavljen Adolf Hurwitz, le tri leta starejši od Hilberta, a tedaj že zrel matematik, ki je bil polnih osem let Hilbertov matematični vodja. Skupno delo je bilo prekinjeno leta 1892, ko sta Hurwitz in Minkowski dobila mesti na univerzi v Zürichu. Sodelovanje z Minkowskim je Hilbert obnovil leta 1902 v Göttingenu, kjer so na Hilbertovo iniciativo posebej za Minkowskega ustanovili novo matematično katedro.

— — —

Hilbertovo znanstveno delo lahko z vidika objavljenih rezultatov grobo razdelimo na šest obdobji: teorija invariant (do leta 1893); algebraična teorija števil (1894–1899); osnove geometrije (1899–1903); analiza: Dirichletov princip, variacijski račun, integralske enačbe, Waringov problem (1904–1909); teoretična fizika (1912–1914); osnove matematike (po letu 1918).

— — —

Posebej velja omeniti pomembno Hilbertovo dejanje, od katerega bo prihodnje leto minilo sto let. V času pariške svetovne razstave je Hilbert na II. mednarodnem kongresu matematikov v Parizu nagovoril svoje stanovske kolege takole: "Prepričanje, da je vsak matematični problem rešljiv, je močna vzpodbuda pri našem delu. Prišepetava nam: *Pred teboj je problem, poišči njegovo rešitev! Do nje lahko prideš s čistim razmislekom, kajti v matematiki ne obstaja ignorabimus*<sup>2</sup>." S temi besedami

---

<sup>2</sup> ignoramus et ignorabimus – ne vemo in ne bomo vedeli - besede, ki absolutizirajo meje spoznanja; izrekel jih je mehanični materialist Du Bois leta 1872 na nekem predavanju.

je Hilbert uvedel svoj znameniti izbor triindvajset odprtih matematičnih problemov, s katerimi je poskušal v glavnih potezah nakazati obrise matematične dejavnosti v prihodnosti in ki so sprožili številne matematične raziskave v dvajsetem stoletju.

I. V teoriji invariant je Hilbert uvedel povsem nov pristop: direktno nealgoritmčno metodo, ki je napovedala in pripravila osnove za tisto, kar bi lahko imenovali abstraktna algebra dvajsetega stoletja. Zanimivo je, da je delo na področju invariant opustil takoj po svojem zelo odmevnem predavanju na mednarodnem kongresu matematikov v Chicagu leta 1893 in se k njemu ni nikoli več vrnil. Podobno so ravnali tudi številni drugi matematiki. Še nikoli ni tako cvetoča matematična veja tako hitro ovenela. Teorija invariant je izumrla kot samostojno področje. Razlog ni bil v tem, da bi bil Hilbert rešil vse njene probleme, ampak, ker je uvedel nov, širši pogled na invariante. To se v matematiki pogosto dogaja. S splošnejšega vidika postanejo veličastne ideje ničeve, globoki premisleki trivialni in rafinirani sklepi nepotrebni. Vseeno pa je presenetljivo, da se je usoda teorije invariant tako bliskovito spremenila, da je bil njen padec tako globok in da ga je povzročil en sam človek.

II. Teorija števil je matematično področje, ki je s svojo lepoto vedno nezadržno privabljal matematično elito sveta. Tudi Hilberta je po opustitvi teorije invariant zvalila "kraljica matematike". Na kratko ni mogoče ustvariti pravega vtisa o količini in vrednosti Hilbertovih rezultatov in objav v algebraični teoriji števil. Njegovi prispevki tej matematični veji so tako vsesplošni in popolni, da, kljub dosežkom njegovih predhodnikov, ostaja vtis, da se je algebraična teorija števil začela pravzaprav s Hilbertom.

Od del s tega področja omenimo posebej le *Der Zahlbericht*, zbirko dokazov iz algebraične teorije števil, ki je izšla leta 1897. *Der Zahlbericht* je več kot le poročilo. To je klasična mojstrovina matematične literature, ki je bila dobrega pol stoletja biblija vseh, ki so se želeli poučiti o algebraični teoriji števil. Le malo je matematičnih del, ki se po jasnosti in didaktični zgradbi lahko kosajo z *Der Zahlbericht*.

V algebraični teoriji števil je Hilbert dosegel svoj znanstveni vrhunec. Od področja se je poslovil, ko je bilo še veliko nedokončanega dela. Svojim učencem in naslednikom je prepustil, da ga dopolnijo.

III. Napoved, da bo v zimskem semestru 1898/99 Hilbert predaval geometrijo, je osupnila göttingenske študente, saj je vsa tri leta, od prihoda na tamkajšnjo univerzo, predaval le teorijo števil.

To je bil začetek Hilbertovega kratkega geometrijskega obdobja. Tradicionalna geometrija je bila veliko lažja kot visoko formalizirana matematika, s katero se je Hilbert ukvarjal v preteklosti. Tudi sicer Hilbertovo delo v geometriji ne zdrži primerjave z njegovimi prispevki k teoriji invariant, algebraini teoriji števil ali analizi.

Svojo pozornost je Hilbert usmeril predvsem v osnove geometrije in že leta 1899 je izdal knjigo *Grundlagen der Geometrie* (Osnove geometrije). V Osnovah geometrije bi težko našli kakšen rezultat, do katerega se ne bi sčasoma dalo priti tudi po drugačni poti, vendar je bila to imenitna knjiga. Doživela je številne izdaje in prevode ter bila zanesljivo najbolj brano Hilbertovo delo.

Delo je imelo velik vpliv na matematiko dvajsetega stoletja. Po aritmetizaciji analize in Peanovih aksiomih je bila večina matematike postavljena na strogo aksiomatske temelje. Ni pa to veljalo za geometrijo. Geometrija je v devetnajstem stoletju cvetela kot še nikoli dotlej, vendar je bil Hilbert prvi, ki ji je v Osnovah geometrije poskusil dati povsem formalni značaj. Več kot dve tisočletji star Evklidov pristop je sicer imel deduktivno zgradbo, toda bila je polna prikritih domnev, nepotrebnih definicij in logičnih nejasnosti.

Hilbert je doumel, da vseh matematičnih pojmov ni moč definirati. Zato začel svojo obravnavo geometrije s tremi nedefiniranimi objekti: točko, premico in ravnino (ki bi jim po njegovem prav tako lahko rekli miza, stol in vrček za pivo) ter šestimi nedefiniranimi relacijami: biti na, biti v, biti med, biti skladen, biti vzporeden in biti zvezen. Geometrijo je zgradil na skupini enaindvajsetih privzetkov, znanih pod imenom Hilbertovi aksiomi. Sem sodi osem aksiomov pripadnosti (med njimi tudi prvi Evklidov postulat), štiri aksiomi urejenosti, pet aksiomov skladnosti, trije aksiomi zveznosti (česar pri Evklidu eksplicitno ne najdemo) in aksiom o vzporednosti, ki je ekvivalenten petemu Evklidovemu postulatu. Za razliko od Evklida je zahteval, da sistem aksiomov izpolnjuje določene logične pogoje:

Biti mora *popoln*: Vsi izreki teorije morajo biti izvedljivi z logičnim premislekom le iz sistema aksiomov.

Biti mora *neodvisen*: Če odstranimo iz sistema poljuben aksiom, potem najmanj enega izreka teorije ne bo moč dokazati.

Biti mora *neprotisloven*: Iz sistema aksiomov ne moremo z logičnim premislekom priti do protislovne trditve.

Hilbertovo pionirsko delo je vplivalo na nastanek novih alternativnih geometrijskih aksiomatik in na začetku dvajsetega stoletja je bil v popolnosti oblikovan povsem formalen deduktivni značaj geometrije.

Od izdaje do izdaje so Osnove geometrije postopoma modernizirali. Toda same osnove geometrije, kot matematično področje, so se razvijale hitreje kot je potekala modernizacija Osnov geometrije. Tako je dandanes Hilbertova knjiga predvsem zgodovinski dokument in ne več osnova za moderni pouk geometrije.

IV. Takoj po izidu Osnov geometrije se je začel Hilbert ukvarjati s starim in slavnim problemom, znanim pod imenom Dirichletov princip. Kot začetek Hilbertovih objav v analizi štejemo leto 1904, ko je osupnil matematični svet z rešitvijo tega problema. Presenečenje je bilo toliko večje, ker je pred tem Weierstrassov kriticizem Dirichletovemu principu močno zmanjšal ugled in mu odrekal verodostojnost. Zanimivo je, da je Hilbert potrdil Dirichletov princip z metodo surove sile podobno preprosto, kot je pred tem opravil s teorijo invariant.

Hilbert je s svojimi deli obogatil tudi klasični variacijski račun, najpomembnejši njegov prispevek k analizi pa je obravnava integralskih enačb v člankih med letoma 1904 in 1910.

Iz Hilbertovega analitičnega obdobja ne smemo prezreti precej izoliranega, a morda njegovega najlepšega dela. To je dokaz pravilnosti Waringove hipoteze, postavljene leta 1770, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto kvečjemu  $m$  samih  $n$ -tih potenc, kjer je število  $m$  odvisno le od eksponenta  $n$  (tako lahko npr. zapišemo vsako naravno število kot vsoto največ štirih kvadratov naravnih števil, devetih kubov, devetnajstih četrtih potenc itd.)

V. Po letu 1909 je kazal Hilbert čedalje večje zanimanje za fiziko, ki je bila, kot je trdil, pretežka, da bi jo prepustili samo fizikom. Rezultati te aktivnosti so bili le delno objavljeni (kinetična teorija plinov, aksiomatika radiacije, relativnost). Splošno mnenje je, da Hilbertovim dosežkom na tem področju manjkata tista temeljitost in iznajdljivost, ki ju najdemo v njegovih matematičnih delih.

VI. Od svojih prvih aksiomatskih dni je Hilbert gojil neizpolnjeno željo, dokazati neprotislovnost matematike ali - po njegovem - neprotislovnost teorije števil. Ta dolgo zatirana želja je sčasoma postala obsedenost.

Njegova ideja absolutnega dokaza neprotislovnosti je bila, prevesti matematiko na končno igro z neskončno mnogo formulami, ki bi bile podane s končno mnogo definicijami. Ta igra bi morala biti neprotislovna;

to je, dokazati bi bilo treba, da, igraje v skladu s pravili, nikoli ne moremo priti do formule  $0 \neq 0$ .

Med Hilbertovi matematičnimi sodobniki so bili taki, ki so dvomili, da je ideja moč izpeljati, pa tudi taki, ki so absolutnemu dokazu neprotislovnosti odrekli smisel.

Katastrofalni udarec za Hilberta je prišel, ko je leta 1931 Kurt Gödel dokazal, da je Hilbertova ideja neizvedljiva. Mar ni Hilbert nikoli podvomil v zdravost svoje ideje? Vse, kar je objavil s tega področja, je tako naivno, da kaže, da je temu res tako. Le kako je to mogoče? Je preveč verjel misli, da v matematiki ne obstaja ignorabimus?

— — —

Hilbert je bil stroga osebnost in neodvisen mislec tudi na nematematičnih področjih. Kot vzhodni Prus je nagibal k političnemu konservatizmu, toda preziral sleherno obliko nacionalizma. Med prvo svetovno vojno je odklonil podpis slavne Deklaracije kulturnega sveta, listo nekakšnih "ni-res-da" stališč, in si drznil objaviti nekrolog za umrlim francoskim matematikom Darbouxom, čeprav sta se Francija in Nemčija vojskovali na nasprotnih straneh.

Biografski zapisi, ki so nastali za časa Hilbertovega življenja, vsebujejo bolj ali manj običajne življenjepisne podatke in se ne dotikajo njegove osebnosti in življenja. Več o Hilbertovem življenju se je ohranilo v ustnem izročilu. Pričevanja je zbrala Constance Reid in leta 1970 izdala skoraj dvestopetdeset strani obsegajočo Hilbertovo biografijo, v kateri je verodostojno in razumevajoče prikazala Hilbertovo osebnost in njegov svet. Knjigi je priključila tudi nekoliko skrajšani nekrolog Hermanna Weyla, ki je ob Hilbertovi smrti izšel v *Bulletin of the American Mathematical Society*. Weylov zapis je temeljita in večša analiza Hilbertovega znanstvenega dela in tudi vpliva njegove osebnosti na študente in sodelavce: "... kot zapeljiva Panova piščal je druge vabil za seboj v globoke matematične vode ...". O Hilbertovem življenju pričajo tudi njegovi lastni spomini na Minkowskega in na Hurwitza<sup>3</sup> in ne nazadnje devetinšestdeset doktorskih del, izdelanih pod njegovim vodstvom. Številni Hilbertovi študenti so kasneje postali slavni matematiki. Med njimi sta bila tudi dva Slovenca, Josip Plemelj in Rihard Zupancič.

*Marija Vencelj*

---

<sup>3</sup> Zvezek s Hilbertovimi spomini, ki mu je priložena gramofonska plošča s Hilbertovim glasom, in knjigo Constance Reid o Hilbertu hrani tudi Matematična knjižnica Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani.