VERIŽNI ULOMKI IN ASTRONOMIJA

V 4. številki lanskega letnika Preseka smo spoznali verižne ulomke, spoznali pa smo tudi razlog, zaradi katerega so jih matematiki začeli preučevati: Verižni približki so zelo dobri približki za (manj lepa) realna števila.

Verižnih ulomkov niso prvi preučevali matematiki, pač pa astronomi. Pri svojih opazovanjih so naleteli na célo vrsto števil, ki se ne "izidejo lepo".

Kot prvi primer navedimo obhodne čase planetov pri gibanju okrog Sonca. Spodnja tabela prikazuje podatke za prve štiri planete, približni obhodni časi so podani v *letih* (t.j. v obhodnih časih Zemlje).

planet	obhodni čas
Merkur	0.241
Venera	0.615
Zemlja	1.000
Mars	1.881

Števila niso posebno lepa, vendar Osončje kljub temu brez težav funkcionira že milijone let. Drugače je, če želimo izdelati mehanski model Osončja. Pri mehanskem modelu bomo "planete" (kroglice) pritrdili na vzvode in jih s pomočjo sistema zobnikov poganjali okoli "Sonca" (svetilke). Vendar lahko z zobniki ustvarimo le *racionalna* razmerja obhodnih časov. Torej je razmerje med obhodnima časoma "planetov" v modelu vedno *ulomek*.

Rešitev iz zagate ponujajo verižni približki. Spomnimo se, da so verižni približki najboljši racionalni približki – med ulomki z manjšim ali enakim imenovalcem ni boljšega približka za dano število, kot je verižni približek. Torej bomo obhodni čas planeta razvili v verižni ulomek (zadostuje že prvih nekaj verižnih koeficientov) in izračunali ustrezne verižne približke. Izmed njih bomo potem izbrali ulomek, ki ga je možno z zobniki čim enostavneje realizirati, hkrati pa zadošča zaželjeni natančnosti.

Za vrednosti iz zgornje tabele dobimo naslednje verižne približke:

planet	obhodni čas
Merkur	$0.241 \doteq 0 \doteq \frac{1}{4} \doteq \frac{6}{25} \doteq \frac{7}{29} \doteq \cdots$
Venera	$0.615 \doteq 0 \doteq 1 \doteq \frac{1}{2} \doteq \frac{2}{3} \doteq \frac{3}{5} \doteq \frac{8}{13} \doteq \cdots$
Zemlja	1.000
Mars	$1.881 \doteq 1 \doteq 2 \doteq \frac{15}{8} \doteq \frac{32}{17} \doteq \frac{79}{42} \doteq \cdots$

V tabeli so navedeni vsi verižni približki, ki jih je glede na natančnost podatkov smiselno navesti. Bralcu prepuščam, da izbere, kateri približek bi bil tehnično gledano najboljši, in da tudi res izdela tak model.

Drugi astronomski problem, povezan z verižnimi ulomki, je problem *lunarnega* oziroma *lunisolarnega koledarja*.

Stoletja so naši predniki poskušali sestaviti koledar, ki bi bil povezan z gibanjem Lune in Sonca (oziroma Zemlje okrog Sonca). Današnji koledar izpolnjuje to nalogo le napol. *Leto* res ustreza obhodu Zemlje okoli Sonca, *mesec* pa nima nikakršne zveze z gibanjem Lune, čeprav je beseda *Mesec* pravzaprav staro slovensko ime za Luno. Pravimo, da je to *solarni* (Sončev) koledar.

Precej ljudi méni, da Luna dosti bolj vpliva na življenje, kot običajno mislimo (preberite npr. knjigo *Vse ob svojem času* ali vsaj *Setveni koledar*). Med našimi predniki je bilo táko mnenje celo zelo razširjeno in naš koledar bi se jim zdel nesprejemljiv. "Pravi" koledar naj bi jasno podal tudi Lunine méne. Mesec mora trajati od mlaja do mlaja. ("En mesec je čas, ko se Mesec vidi. Ko ga ne vidimo več, se mesec neha.")

Z dolgotrajnim opazovanjem Lune in z dodajanjem novih in novih izboljšav, se je astronomom že v antičnih časih posrečilo, da so tak(e) koledar(je) tudi res izdelali. Danes se problema lahko lotimo po lažji poti, brez opazovanj. V astronomskih knjigah zasledimo, da traja en Lunin mesec (čas od enega do drugega mlaja ali *sinodski mesec*) v povprečju $M = 29.530588$ dni. Odstopanja od povprečja so majhna, zato bomo računali, kot da vsi meseci trajajo natančno toliko.

Razvijmo število M v verižni ulomek:

$$29.530588 = [29, 1, 1, 7, 1, 2, 16, 1, \ldots]\,.$$

Takoj dobimo tudi ustrezne verižne približke:

$$29, \quad 30, \quad \frac{59}{2}, \quad \frac{443}{15}, \quad \frac{502}{17}, \quad \frac{1447}{49}, \quad \frac{23654}{801}, \quad \frac{25101}{850}, \ldots$$

Prvi trije približki nam razkrijejo tisto, kar so naši predniki najhitreje ugotovili: 2 (Lunina) meseca trajata približno 59 dni. Torej si morajo v koledarju izmenično slediti (koledarski) meseci z 29 in 30 dnevi. Temu bomo rekli *osnovno zaporedje*.

Približek $\frac{443}{15}$ pomeni, da 15 mesecev traja približno 443 dni; naslednji približek $\frac{502}{17}$ pa, da je 17 mesecev približno 502 dneva. Ulomka sta približno enako preprosta, vendar je $\frac{502}{17}$ boljši približek, zato si ga oglejmo natančneje. 502 dneva je možno zelo preprosto razporediti na 17 (koledarskih) mesecev:

$$\underbrace{30 + 29 + 30 + 29 + 30 + \cdots + 30}_{17 \text{ mesecev}} = 502 \text{ dneva}\,.$$

Takó dobimo sedemnajstmesečni *ciklus*, ki od osnovnega zaporedja odstopa le ob koncu oziroma ob začetku novega ciklusa. Takrat si sledita dva meseca s po 30 dnevi, sicer pa meseci tečejo izmenično (30, 29, ...) kot v osnovnem zaporedju.

Poglejmo si še natančnost:

$$17M = 17 \cdot 29.530588 = 502.019996 \text{ dni}\,,$$

kar je le za 0.019996 dneva (približno pol ure) več kot en koledarski ciklus. Torej je napaka

$$\Delta = 0.019996 \text{ dni}/1 \text{ ciklus}$$

ali

$$\Delta = 1 \text{ dan}/50.01 \text{ ciklusa.}$$

Ker koledar odstopa od gibanja Lune povprečno za 1 dan v 50 ciklusih, je logično poskusiti z najpreprostejšim popravkom: Po vsakem petdesetem ciklusu dodamo 1 dan (lahko bi rekli "prestopni dan") in šele po tem dnevu se začne naslednji ciklus.

Če vključimo ta popravek, potem 50 ciklusov (z dodatkom) traja

$$50 \cdot 502 + 1 = 25101 \text{ dan}\,,$$

ti dnevi pa so razporejeni v

$$50 \cdot 17 = 850 \text{ mesecev.}$$

Zanimivo je, da smo tako prišli prav do števila $\frac{25101}{850}$, kar je spet verižni približek za število M.

V tem primeru je napaka enaka

$$\begin{aligned}\frac{25101}{850} - 29.530588 &\doteq 0.00000024 \text{ dni/1 mesec} \doteq \\ &\doteq 1 \text{ dan/4250000 mesecev} \doteq \\ &\doteq 1 \text{ dan/350000 let.}\end{aligned}$$

Tak koledar je gotovo za zdaj zelo dober; če bo treba, pa ga lahko čez par tisočletij popravimo.

Tako smo dobili uporaben *lunarni* koledar – koledar, ki se natančno ujema z (izračunanimi) Luninimi menami. Mlaj je vedno prvega (ali zadnjega) v mesecu, polna Luna je petnajstega. Odstopanje pravih Luninih men od matematičnega povprečja je majhno (do 1 dan) in **skoraj** bi lahko trdili, da je tak koledar idealen.

Skoraj! Ne smemo spregledati, da je tudi ta koledar le polovičarski. Nikakor namreč ne sledi toku letnih časov, je *samó lunarni*. Naslednje vrstice posvetimo zato problemu združitve lunarnega in solarnega koledarja v *lunisolarni* koledar.

Najprej poskusimo ugotoviti, koliko Luninih mesecev traja eno leto. Pogled v astronomsko literaturo nam pove, da eno leto v povprečju traja $L = 365.2422$ dni. Torej ima leto

$$\frac{365.24422}{29.530588} = 12.36827 \text{ mesecev.}$$

Dobljeno število razvijemo v verižni ulomek:

$$12.36827 = [12, 2, 1, 2, 1, 1, 17, 1, 3, \ldots] .$$

Ustrezni verižni približki so

$$12, \quad \frac{25}{2}, \quad \frac{37}{3}, \quad \frac{99}{8}, \quad \frac{136}{11}, \quad \frac{235}{19}, \quad \frac{4131}{334}, \quad \ldots$$

To pomeni, da ima leto približno 12 mesecev, natančneje, dve leti imata skupaj 25 mesecev, a odstopanje je še kar precejšnje ($7\frac{3}{4}$ dni v dveh letih). Boljši je naslednji približek $\frac{37}{3}$, ki pomeni, da ima "navadno leto" 12 mesecev, vsako tretje leto pa je "prestopno" in ima en mesec več (odstopanje je le 3 dni v 3 letih).

Bralcu prepuščamo, da se pozabava še s približkoma $\frac{99}{8}$ in $\frac{136}{11}$. Zlasti slednji približek je zanimiv, saj trdi, da je 11 let približno 136 mesecev; 136 mesecev pa je enako obdobje kot 8 zgoraj opisanih sedemnajstmesečnih ciklusov.

Zgodovinsko se je najbolje izkazal šesti približek, ki pravi, da je 19 let približno 235 mesecev. Približek je zelo natančen, saj odstopa od prave vrednosti le za 1 dan v 220 letih. Na osnovi tega približka so babilonski in grški astronomi sestavili koledar, ki je ponekod po svetu, z nekaterimi spremembami in različicami, v veljavi še zdaj. Uporabljajo ga zlasti muslimani in Židje, z njegovo pomočjo pa določajo tudi datume premakljivih praznikov (Velika noč, Binkošti) v prenekateri krščanski cerkvi.

Osnova koledarja je Métonov ciklus 235 Luninih mesecev. Ti meseci so razdeljeni na 19 let takó, da dobimo 12 let s po 12 meseci in 7 let s po 13 meseci. Praktično se da razporeditev izvesti na primer takó, da pride prva polna Luna po pomladnem enakonočju na 15. dan prvega meseca. Prvi dan prvega meseca je potem vedno v dneh okrog pomladnega enakonočja, od leta do leta so sicer razlike, a niso pretirano velike. Tak koledar so uporabljali Židje že pred več tisočletji in kot izvemo iz Svetega pisma, je bil véliki praznik *Pasha* (po naše Velika noč) vedno *15. nisana*[1]. Iz istega vira izvemo še več: različne verske ločine so uporabljale različne variante tega koledarja in zato je trinajsterica z Jezusom na čelu proslavljala *Pasho* dva dni prej, kot so jo proslavljali v jeruzalemskem templju.

Vprašajmo se še, kako naj bi bili razporejeni dnevi v teh 235 mesecih. Žal število 235 ni deljivo s 17, zato si ne moremo pomagati s sedemnajstmesečnimi ciklusi, ki so se nam tako lepo posrečili. Mesece s 30 in 29 dnevi sicer lahko razporejamo takó, kot smo opisali zgoraj, a potem bodo med koledarji za posamezna leta velike razlike.

Bolj logično je, če začnemo vsa leta enako. Prvih 12 mesecev naj bo:

$$30 + 29 + 30 + 29 + \cdots + 29 = 354 \text{ dni},$$

morebitni trinajsti mesec pa naj ima vedno 30 dni. Tako pridemo za 19 let do skupne vsote

$$19 \cdot 354 + 7 \cdot 30 = 6936 \text{ dni}.$$

V resnici pa 235 Luninih mesecev traja 6939.6882 dni, torej moramo nekam dodati še 3.6882 dni. Če dodamo še po 1 dodatni dan vsakemu drugemu prestopnemu mesecu, smo s tem dodali celotnemu ciklusu 3.5 dni (v dveh ciklusih je 14 prestopnih mesecev, sedmim dodamo po en dan).

[1] Nisan je ime prvega meseca.

Ujemanje z Luninimi menami je zdaj že bistveno boljše in odstopanje je približno 1 dan na 100 let. Postopek lahko zdaj nadaljujemo tako, da dodamo še po 1 dan na vsakih 100 let, izračunamo novo odstopanje, ga spet popravimo in tako naprej, dokler nismo z rezultatom zadovoljni.

Lahko pa bi se stvari spet lotili z verižnimi ulomki. Število 3.6882 bi razvili v verižni ulomek in poiskali kak lep verižni približek. Že $\frac{11}{3}$ je boljši približek kot 3.5, pomeni pa, da moramo v treh Métonovih ciklusih dodati 11 dodatnih dni. V treh ciklusih je 21 prestopnih mesecev in enajstim bi morali dodati po 1 dan (to pomeni: prvemu, tretjemu, petemu, ... in enaindvajsetemu). Realizacija tega popravka torej ni težka, bralcu pa predlagamo še, da ugotovi, kakšno bi bilo odstopanje od idealnega Luninega koledarja.

Vprašajmo se še, zakaj sploh računati odstopanje od Luninega meseca. Zakaj ne računamo raje odstopanja od Sončevega leta?

Odgovor je praktične narave. Odstopanje od Luninega meseca je opaznejše, saj je mesec krajši. Zato je pametneje, da poskrbimo za ujemanje koledarja z Luno in pri tem dopustimo odstopanje od teka letnih časov. Povedali smo že, da približek $\frac{235}{19}$ odstopa od prave vrednosti za 1 dan v 220 letih. Če dobro uredimo lunarni del koledarja, bo solarni del avtomatično odstopal od Sončevega leta samo za toliko. Začetek leta pri lunisolarnem koledarju ni fiksen in zato povprečen človek v svojem kratkem življenju takó majhne napake niti ne opazi. Šele v približno 40000 letih bi napaka tako narasla, da bi se začetek leta prestavil s pomladnega na jesensko enakonočje.

Kaj pa tedni? Če vztrajamo pri sedemdnevnih tednih, je uskladitev z meseci in leti takorekoč nemogoča. Še najlepša je varianta, pri kateri se leto vedno začne z nedeljo, ne glede na to, s katerim dnevom se je prejšnje leto končalo.

Drugo zanimivo varianto dobimo z delitvijo meseca na tretjine. Tako dobimo desetdnevne tedne, le zadnjemu tednu v 29-dnevnem mesecu manjka 1 dan; koledar je za vse mesece enak, izjema je le dodatni zadnji dan. Dodatna zanimivost takega koledarja je dejstvo, da ima leto približno $12\frac{1}{3}$ meseca, kar vidimo iz približka 37 mesecev $\doteq$ 3 leta. Bralca vabim, da poskusi izdelati koledar, ki bi temeljil na ustreznem triletnem ciklusu, ali pa koledar, v katerem bi imelo leto 12 mesecev in še en dodatni desetdnevni teden. Poglavitni del naloge je seveda razporeditev popravkov, t.j. dodatnih mesecev oziroma tednov, s katerimi uredimo trajanje leta, in dni, s katerimi uredimo trajanje meseca.

Marino Pavletič