STOPNJE TOČK GRAFOV V NALOGAH (za konec gremo tudi v Portorož)

V Preseku in tudi drugje pogosto naletimo na naloge, ki jih lahko prevedemo v jezik teorije grafov. Take naloge so posebej pogoste na mednarodnih matematičnih tekmovanjih mest, ki jih spremlja tudi Presek. Pri nalogah tega tipa nam grafi pomagajo na dva načina. Najprej z njimi nalogo prevedemo v matematični jezik, nato pa z nekaj znanja o grafih in kakšno dobro idejo poskušamo problem tudi rešiti.

Ko sem pregledoval naloge te vrste, sem ugotovil, da jih lahko razdelimo v dve skupini: v skupino nalog o stopnjah točk grafov in skupino preostalih nalog, ki jih tudi lahko rešujemo s pomočjo grafov. Vsaj polovica nalog obravnava stopnje točk in take naloge si bomo ogledali tokrat.

Na tem mestu vabim bralca, da pogleda na konec članka (naloga 7), kjer se odpravimo na portoroško plažo. Če lahko reši zastavljeni problem, zasluži vse čestitke. V vsakem primeru naj se potem vrne nazaj in pregleda, kako rešujemo podobne naloge. Če bo tudi potem portoroški problem ostal pretrd oreh, pa naj bralec pogleda v prihodnjo številko Preseka, kjer bomo objavili rešitev.

Nekaj besed o grafih

O grafih Presek kar pogosto piše, na primer pred kratkim, ko je bilo govora o varnih poteh in kratkih poteh. Tudi v Presekovi knjižnici najdemo prijetno branje o grafih za začetnike (Bajc, Pisanski: *Najnujnejše o grafih*). Nobene škode pa ne bo, če tudi tu pojasnimo osnovne pojme teorije grafov.

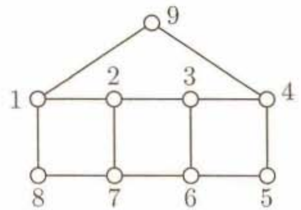
Graf G sestavljata množica *točk*, ki jo označimo z $V(G)$, in množica *povezav*, ki jo označimo z $E(G)$. Pri tem je množica $E(G)$ sestavljena iz (neurejenih) parov točk. Točki iz iste povezave imenujemo *sosedi*. Zelo pogosto si pomagamo s sliko grafa, ki jo dobimo takole: Za vsako točko grafa narišemo krožec, med dvema točkama pa potegnemo črto (povezavo), če ti dve točki nastopata kot par v množici $E(G)$. Na primer, če je množica točk grafa G enaka

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

in je množica povezav

$$\{\{1,2\},\{1,8\},\{1,9\},\{2,3\},\{2,7\},\{3,4\},$$
$$\{3,6\},\{4,5\},\{4,9\},\{5,6\},\{6,7\},\{7,8\}\},$$

graf G lahko narišemo, kot je prikazano na sliki 1.



Slika 1. Graf G.

Osnovni pojem o grafu, ki ga še potrebujemo, je število povezav, ki izhajajo iz dane točke. Temu številu rečemo *stopnja točke*. Na grafu G s slike 1 so točke 5, 8 in 9 stopnje 2, medtem ko so ostale točke stopnje 3. Dovoljene so tudi točke stopnje 0, torej take, ki nimajo nobenega soseda. Stopnjo točke u bomo označili z $d(u)$. Dogovorimo se tudi, da naj $|E(G)|$ označuje število vseh povezav grafa G. (V gornjem primeru imamo $|E(G)| = 12$.)

Tale uvodni del zaključimo z naslednjo ugotovitvijo, ki se imenuje *osnovna lema teorije grafov*. Za poljubni graf G z množico točk $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ velja:

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(n) = 2 \cdot |E(G)| . \tag{1}$$

Osnovna lema teorije grafov torej trdi, da je vsota stopenj točk grafa enaka dvakratniku števila povezav. Res je tako, saj ko seštejemo stopnje vseh točk, vsako povezavo upoštevamo ravno dvakrat. (Preizkusi to sam na gornjem primeru.) Kljub temu, da je osnovna lema teorije grafov dokaj preprosta, je izjemno uporabna. To bomo delno spoznali v nadaljevanju tega članka.

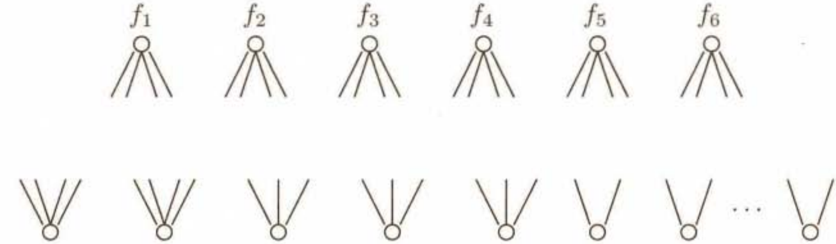
Naloge s stopnjami točk

Naloga 1. (Izbirno tekmovanje za 1. letnik, 1991) V skupini ljudi je vsak poznal liho število ljudi iz te skupine. Dokaži, da je v skupini sodo ljudi.

To je tipična naloga, ki jo s pomočjo osnovne leme teorije grafov uženemo v trenutku. Vsaki osebi priredimo točko grafa, povezave pa naj predstavljajo poznanstva. Predpostavka naloge pravi, da je stopnja vsake točke liho število. Če bi bilo v skupini liho ljudi, potem bi na levi strani strani enakosti (1) dobili liho število (vsota lihega števila lihih števil je liho število). Ker imamo na desni strani enakosti (1) sodo število, to ni možno, zato mora biti v skupini sodo število ljudi.

Naloga 2. (Izbirno tekmovanje za 1. letnik, 1979) V družbi šestih fantov so tudi dekleta. Dve dekleti poznata vsaka po štiri fante, tri vsaka po tri fante, ostale pa vsaka po dva fanta. Noben fant ne pozna več kot štiri dekleta. Koliko največ je lahko deklet v družbi?

Shematično smo nalogo prikazali na sliki 2, kjer smo z $f_1, f_2, \ldots, f_6$ označili šest fantov.



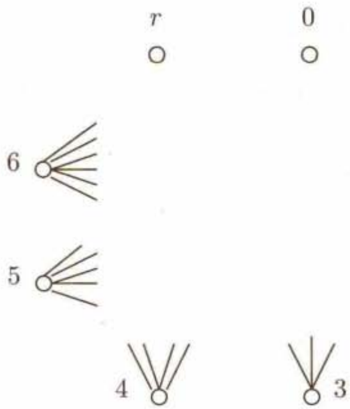
Slika 2. Šest fantov in dekleta.

Največje število deklet bomo imeli v primeru, ko vsak fant pozna po štiri dekleta, ta primer smo tudi prikazali na sliki. Povezav, ki izhajajo iz fantov, je v tem primeru $6 \cdot 4 = 24$. Seveda mora biti tudi število povezav, ki izhajajo iz deklet, enako 24. Pet deklet s štirimi oz. tremi znanci nam da skupaj 17 povezav. Preostane nam še 7 povezav za dekleta z dvema znancema, torej imamo prostora še za tri dekleta. V družbi je torej največ 8 deklet.

Naloga 3. V cirkuški predstavi nastopajo štirje pari klovnov, dva rdeča, dva modra, dva zelena in dva rumena. Med predstavo se na veselje gledalcev zaletavajo med seboj, pri tem pazijo le, da se ne zaletijo v klovna enake barve. Nekega dne je prvi rdeči klovn po predstavi vprašal vseh preostalih sedem klovnov, v koliko drugih klovnov so se zaleteli med predstavo. Dobil je same različne odgovore. V koliko klovnov se je med predstavo zaletel drugi rdeči klovn?

Na prvi pogled je videti, kot da nalogi manjkajo podatki. Vendar temu ni tako. Sestavimo graf G takole: Njegove točke naj predstavljajo klovne, graf ima torej 8 točk. Dve točki povežimo s povezavo, če sta se ustrezna klovna med predstavo zaletela. Zanima nas torej stopnja točke, ki ustreza drugemu rdečemu klovnu.

Stopnja točke v grafu G je največ 6, saj imamo 8 točk, klovn pa ni sam sebi sosednji in tudi klovnu iste barve ne. Zato so odgovori, ki jih je dobil prvi rdeči klovn, enaki 0, 1, 2, 3, 4, 5 in 6. Označimo ustrezne točke v G kar z 0, 1, 2, 3, 4, 5 in 6, prvega rdečega klovna pa z r (glej sliko 3).



Slika 3. Stopnje klovnov.

Poglejmo klovna stopnje 6. Ta je sosednji vsem klovnom, razen istobarvnemu. Ta mora biti seveda stopnje 0, saj imajo vsi drugi klovni vsaj enega soseda. Recimo, da klovna 6 in 0 tvorita modri par. Poglejmo sedaj klovna, ki je odgovoril s 5. Ta klovn ni sosednji 0 niti 1 (saj je njemu sosednji 6). To pomeni, da klovna 5 in 1 tvorita par, recimo zelenega. Z enakim premislekom bo sedaj vsak sam ugotovil, da klovna 4 in 2 tvorita rumeni par. To pa že pomeni, da je klovn 3 drugi rdeči klovn, torej se je zaletel s tremi drugimi klovni.

Naloga 4. (14. mednarodno tekmovanje mest – pomladanski krog, prva skupina, 1992/93) V Petrovem razredu je poleg njega še 25 dijakov. Peter je opazil, da ima vsak izmed teh 25 dijakov različno število prijateljev. Koliko prijateljev ima Peter v tem razredu? Podaj vse možne odgovore.

Ta naloga precej spominja na prejšnjo, klovnovsko, zato bomo rešitev le skicirali, bralec pa naj doda manjkajoče podrobnosti.

Ker ima ustrezni graf 26 točk, je največja možna stopnja 25. Ločimo dva primera. V prvem primeru predpostavimo, da ima vsak vsaj enega prijatelja, torej da ni točke stopnje 0. Torej, 25 dijakov ima stopnje od 1 do 25. Sedaj kot v nalogi s klovni pridemo do zaključka, da ima Peter 13 prijateljev.

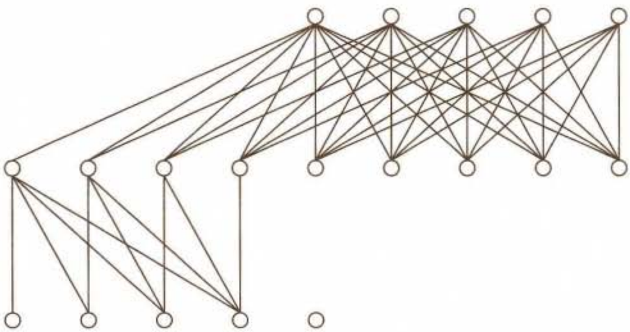
V drugem primeru predpostavimo, da imamo točko stopnje 0. To pomeni, da ima preostalih 24 dijakov stopnjo največ 24, zato so njihove stopnje od 1 do 24. Kot pri klovnih zopet sklepamo, da ima Peter v tem primeru 12 prijateljev.

Naloga 5. (18. mednarodno tekmovanje mest – jesenski krog, prva skupina, 1996/97)

a) Ali obstaja taka družba 10 deklet in 9 fantov, da so števila fantov, s katerimi se posamezna dekleta poznajo, med seboj različna, števila deklet, s katerimi se posamezni fantje poznajo, pa so med seboj enaka?

b) Ali obstaja družba 11 deklet in 10 fantov z zgornjo lastnostjo?

Rešitev te naloge najdemo v prvi številki lanskega Preseka. Tu le dodajmo, da (negativni) odgovor na vprašanje b) takoj dobimo z osnovno lemo teorije grafov, ustrezni graf za (pozitivni) odgovor na vprašanje a) pa je prikazan na sliki 4.



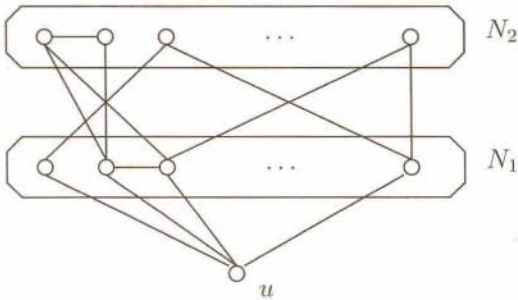
Slika 4. Rešitev naloge 5.

Zadnja naloga, ki jo bomo rešili, je zahtevnejša in primerna za dijake v zaključnih razredih srednje šole. Kdor ne sodi v to skupino, naj nalogo kar preskoči in se loti portoroških plaž.

Naloga 6. (16. mednarodno tekmovanje mest – pomladanski krog, druga skupina, 1994/95) Dokaži, da sta v skupini 50 ljudi vedno dva, ki imata sodo število (lahko tudi 0) skupnih znancev iz skupine.

Kot smo že navajeni, bodo točke grafa za to nalogo predstavljale ljudi in povezave poznanstva.

Najprej opazimo, da ni kaj dokazovati, če obstajata dve točki, ki nimata skupnega soseda (saj imata 0 skupnih sosedov). Predpostavimo torej, da ni dveh takih točk. Zato si graf lahko predstavljamo takole: Vzemimo neko poljubno točko, recimo u. Nato en nivo nad njo narišimo vse njene sosede, še en nivo više pa vse sosede sosedov, ki jih še nismo narisali (glej sliko 5). Prvi nivo smo označili z N_1 in drugega z N_2. Povezave našega grafa torej potekajo med u in N_1, med N_1 in N_2 ter znotraj N_1 in znotraj N_2.



Slika 5. Graf poznanstev po nivojih.

Na sliki 5 se pojavijo vse točke našega grafa. Če bi namreč obstajal še en višji nivo, potem točka u ne bi imela skupnega soseda s točkami tretjega nivoja, vendar smo to možnost izključili.

Naj bo v poljubna točka iz N_1, torej poljubna soseda točke u. Če ima v znotraj N_1 sodo sosedov, je problem rešen, saj imata tedaj u in v sodo število skupnih sosedov. Zato predpostavimo, da ima v liho sosedov v N_1. Ker je bila v poljubna točka iz N_1, ima torej vsaka točka iz N_1 liho sosedov v N_1. Sedaj uporabimo osnovno lemo teorije grafov, iz katere sledi, da je v N_1 sodo število točk. Z drugimi besedami, stopnja točke u je soda.

Spomnimo se, da je bila u poljubna točka našega grafa, torej smo ugotovili, da so vse točke grafa sode stopnje.

Vzemimo sedaj poljubno točko w iz N_2. Če ima w sodo sosedov v N_1, smo opravili, saj imata tedaj u in w sodo skupnih sosedov. Zato predpostavimo, da ima ima w liho sosedov v N_1. Ker je v N_1 sodo število točk, ki imajo sodo mnogo sosedov v N_2, ugotovimo, da mora biti v N_2 sodo število točk. Torej imamo sodo točk v N_1, sodo točk v N_2 in še točko u, skupaj torej liho število točk. To seveda ni možno, saj ima graf po predpostavki 50 točk. Tako smo prišli v protislovje, ki nam pove, da smo morali v enem prejšnjih korakov izpeljave imeti situacijo z dvema točkama s sodim številom skupnih sosedov.

Pozorni bralec je verjetno opazil, da naloge nismo rešili le za 50 ljudi, ampak za poljubno skupino sodo mnogo ljudi.

Tako. Spoznali smo nekaj tipičnih nalog, ki jih lahko rešimo s pomočjo grafov in stopnjami točk. Za konec pa še obljubljena portoroška naloga.

Naloga 7. Kot gotovo veste, je portoroška plaža sredi poletja zelo zasedena. Vsekakor toliko, da imate, kjerkoli že ste na njej, na razdalji do 10 m še druge obiskovalce. Pokaži, da lahko v takem vrvežu vedno najdemo dve osebi, ki imata enako število obiskovalcev plaže, oddaljenih do 10 m od njiju. Ali trditev velja tudi, če 10 m zamenjamo s 100 m?

Sandi Klavžar

ZA REŠITEV BEALOVEGA PROBLEMA RAZPISANA NAGRADA V VIŠINI 50.000 DOLARJEV

Andrew Beal je ameriški milijonar iz Dallasa. Star je 45 let, ima 5 otrok in je lastnik največje lokalne banke v Dallasu. Zelo ga zanima matematika in njen pomen v družbi. Veliko časa je razmišljal o Fermatovem problemu, o katerem je bilo v Preseku že veliko napisanega. Problem je leta 1994 rešil angleški matematik Andrew Wiles, ki je z zelo zahtevnim dokazom potrdil Fermatovo domnevo, da za poljubno naravno število $n > 2$ enačba

$$x^n + y^n = z^n$$

ni rešljiva v množici naravnih števil. Andrew Beal je še vedno prepričan, da je Fermat poznal relativno enostaven dokaz svoje domneve. Postavil pa je tudi svojo domnevo o rešitvah enačbe

$$x^m + y^n = z^r ,$$

ki je podobna Fermatovi enačbi, le da imamo namesto enega samega eksponenta (n) tri (m, n in r). Recimo tej enačbi na kratko Bealova enačba. Če dopuščamo, da je vsaj en eksponent enak 1 ali 2, potem ima Bealova enačba mnogo rešitev. Tudi pri dodatni zahtevi, da so eksponenti različni, je mogoče najti primere: $1^1 + 2^3 = 3^2$, $2^5 + 7^2 = 3^4$ in $7^3 + 13^2 = 2^9$.

Vzemimo sedaj, da so naravna števila m, n in r večja od 2. Tedaj Andrew Beal domneva naslednje:

Če naravna števila x, y in z zadoščajo Bealovi enačbi, potem imajo skupni delitelj (večji od 1).