PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **25** (1997/1998)
Številka 6
Strani 332–336

Ivan Vidav:

REŠITEV ENAČBE $x^2 + y^2 = 10^n x + y$ V NARAVNIH ŠTEVILIH

Ključne besede: matematika, reševanje enačb, desetiški sestav, rekreacijska matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/25/1354-Vidav.pdf

REŠITVE ENAČBE $x^2 + y^2 = 10^n x + y$ V NARAVNIH ŠTEVILIH

V nekem časopisu za razvedrilo je bilo pred nedavnim postavljeno tole vprašanje: Kako (se pravi, s kakšnimi računskimi operacijami) dobimo iz števil 88 in 33 število 8833? Prav preprosto, bi rekli: številki 88 in 33 damo skupaj, pa je že pred nami 8833. Vendar ta odgovor ne velja. Vsota in produkt sta namreč neodvisna, v katerem sestavu računamo, v desetiškem, dvojiškem ali kakem drugem. Če pa damo skupaj številki, ki predstavljata števili x in y, rezultat ni odvisen samo od x in y temveč tudi od sestava, v katerem sta zapisana x in y. Zato zlepljanje številk ni prava računska operacija.

Odgovor na zgornje vprašanje se je glasil takole: 8833 dobimo, če 88 in 33 kvadriramo in kvadrata seštejemo. Res je

$$88^2 + 33^2 = 7744 + 1089 = 8833\,.$$

Podobno lastnost imata števili 10 in 1. Tukaj je $10^2 + 1^2 = 101$, vsoto 101 pa dobimo, če staknemo skupaj 10 in 1.

Ali so še drugi taki pari?

Iščemo torej pare naravnih števil x in y, ki se odlikujejo s tole lastnostjo:

(S) **Vsota $x^2 + y^2$ je enaka številu, ki ga dobimo, če damo skupaj številki, ki v desetiškem sestavu predstavljata x in y.**

Pa vzemimo poljubni naravni števili x in y, zapisani v desetiškem sestavu. Katero število dobimo, če staknemo skupaj številki za x in y (in sicer x na levi, y na desni)? Imenujmo to število z. Denimo, da je y n–mestno število ($n \geq 1$). Razlika $z - y$, zapisana v desetiškem sestavu, ima očitno na koncu n ničel, njene začetne števke pa določajo x. Potemtakem je ta razlika enaka $10^n x$, iskano število z pa je $10^n x + y$. Torej:

Če damo skupaj številki, ki predstavljata naravni števili x in y v desetiškem sestavu, in ima y n mest, dobimo število $10^n x + y$.

Naravni števili x in y, ki sestavljata par z lastnostjo (S), zadoščata potemtakem enačbi

$$x^2 + y^2 = 10^n x + y\,, \tag{1}$$

se pravi enačbi iz naslova. Rešitev v naravnih številih x, y, n pa določa par z lastnostjo (S) le pri pogoju, da je n število mest, ki jih ima y, zapisan v desetiškem sestavu.

Pri izbranem n pomeni enačba (1) v ravnini, opremljeni s pravokotnim koordinatnim sistemom, krožnico, ki gre skozi izhodišče (točka s koordinatama $x = 0$, $y = 0$ zadošča enačbi). Pomnožimo to enačbo s 4 in jo nato zapišimo v tejle ekvivalentni obliki

$$(2x - 10^n)^2 + (2y - 1)^2 = 10^{2n} + 1\,. \tag{1*}$$

Iz nje razberemo, da ima središče krožnice (1) koordinati $p = \frac{1}{2} \cdot 10^n$, $q = \frac{1}{2}$. Postavimo

$$X = 2x - 10^n\,, \quad Y = 2y - 1\,, \tag{2}$$

pa je pred nami enačba

$$X^2 + Y^2 = 10^{2n} + 1\,. \tag{3}$$

Če sta x in y naravni števili, sta X in Y celi števili.

Pri danem n je desna stran $10^{2n} + 1$ znano število, in sicer liho. Vse celoštevilske rešitve enačbe (3) najdemo tako, da zapišemo $10^{2n} + 1$ na vse mogoče načine kot vsoto dveh kvadratov celih števil. Naj bo npr.

$$10^{2n} + 1 = A^2 + B^2\,,$$

kjer sta A in B naravni števili. Eno izmed njiju je sodo, drugo liho. Smemo vzeti, da je A sodo in B liho. Ta razcep nam da 8 rešitev enačbe (3) v celih številih, namreč

$$X = \pm A\,, \quad Y = \pm B \qquad \text{in} \qquad X = \pm B\,, \quad Y = \pm A\,,$$

kjer lahko vzamemo povsod poljuben znak.

Iz zapisa (2) vidimo, da je X sod in Y lih. Torej moramo postaviti

$$2x - 10^n = \pm A \quad \text{in} \quad 2y - 1 = \pm B\,.$$

Od tod izračunamo

$$x = \frac{1}{2}(10^n \pm A)\,, \quad y = \frac{1}{2}(1 \pm B)\,. \tag{4}$$

Ker je $A \leq 10^n$, je x naravno število, katerikoli znak vzamemo pri A. Zaradi $B \geq 1$, pa je y naravno število samo pri znaku $+$ pri B. Torej nam da vsak razcep števila $10^{2n}+1$ na vsoto dveh kvadratov dve rešitvi enačbe (1) v naravnih številih. Dobljeni par x, y pa ima zahtevano lastnost le v primeru, kadar je y n–mestno število.

Ker je $10^{2n} + 1 = (10^n)^2 + 1^2$, lahko vzamemo $A = 10^n$, $B = 1$ (trivialni razcep). Ustrezna rešitev je $x = 10^n$, $y = 1$ (pri trivialnem razcepu je x naravno število (tj. pozitivno celo število) samo pri znaku $+$ na desni). Ker je $y = 1$ enomestno število, ima par $10^n, 1$ lastnost (S) le pri $n = 1$, to je par $x = 10$, $y = 1$, ki smo ga že navedli.

Če želimo dobiti druge pare, moramo najti kak netrivialni razcep števila $10^{2n} + 1$ na vsoto dveh kvadratov. Kdaj tak razcep obstaja? V članku *Kako ugotovimo, da je naravno število sestavljeno, preden ga razstavimo* (Presek, 25 (1997/98), str. 130–136) je bilo dokazano, da je naravno število sestavljeno, če se da vsaj na dva načina zapisati kot vsota dveh kvadratov. Brez dokaza povejmo, da velja v našem primeru tudi obratna trditev: Če $10^{2n} + 1$ ni praštevilo, se da vsaj na dva načina izraziti kot vsota dveh kvadratov. Vsak razcep na dva faktorja določa torej poleg trivialnega tudi netrivialni razcep na vsoto dveh kvadratov.

Zgledi.

Pri $n = 1$ je število $10^2 + 1 = 101$ praštevilo in obstaja zato samo trivialni razcep na vsoto dveh kvadratov.

Pri $n = 2$ je $10^4+1 = 73 \cdot 137$, se pravi sestavljeno število. Pripadajoči netrivialni razcep v vsoto dveh kvadratov se glasi $10^4 + 1 = 76^2 + 65^2$, torej $A = 76$, $B = 65$. Po formuli (4) dobimo para $x = 88$, $y = 33$ in $x = 12$, $y = 33$.

Pri $n = 3$ imamo razcep $10^6 + 1 = 101 \cdot 9901$. Oba faktorja na desni sta praštevili. Pripadajoča vsota kvadratov se glasi $10^6 + 1 = 980^2 + 199^2$ in določa para $x = 990$, $y = 100$ ter $x = 10$, $y = 100$.

Nekaj nadaljnjih primerov kaže razpredelnica:

$n = 1$	$x = 10,\ y = 1$:	$10^2 + 1^2 = 101$
$n = 2$	$x = 12,\ y = 33$:	$12^2 + 33^2 = 1233$
	$x = 88,\ y = 33$:	$88^2 + 33^2 = 8833$
$n = 3$	$x = 10,\ y = 100$:	$10^2 + 100^2 = 10100$
	$x = 990,\ y = 100$:	$990^2 + 100^2 = 990100$
$n = 4$	$x = 588,\ y = 2353$:	$588^2 + 2353^2 = 5882353$
	$x = 9412,\ y = 2353$:	$9412^2 + 2353^2 = 94122353$
$n = 6$	$x = 116788,\ y = 321168$:	$117688^2 + 321168^2 = 117688321168$
	$x = 883212,\ y = 321168$:	$883213^2 + 321168^2 = 883213321168$
	$x = 123288,\ y = 328768$:	$123288^2 + 328768^2 = 123288328768$
	$x = 876712,\ y = 328768$:	$876712^2 + 328768^2 = 876712328768$

Kadar je n deljiv s kakim lihim faktorjem, je $10^{2n}+1$ vselej sestavljeno število. Naj bo npr. $n = kr$, kjer sta k in r naravni števili in r lih. Iz formule

$$a^r + b^r = (a+b)(a^{r-1} - a^{r-2}b + \ldots + b^{r-1}),$$

ki velja za vsak lih eksponent r, dobimo, če vstavimo $a = 10^{2k}$ in $b = 1$, razcep

$$10^{2kr} + 1 = (10^{2k} + 1)((10^{2k})^{r-1} - (10^{2k})^{r-2} + \ldots + 1).$$

Torej ima $10^{2n} + 1 = 10^{2kr} + 1$ faktor $10^{2k} + 1$. Posebej, kadar je n lih, lahko vzamemo $r = n$, $k = 1$. Število $10^{2n} + 1$ je v tem primeru deljivo s 101. Enačba (1) ima zato pri lihem n poleg rešitve $x = 10^n$, $y = 1$ vsaj še dve nadaljnji rešitvi v naravnih številih. Toda če je $n > 3$, ni pri faktorju 101 nikoli več izpolnjen dodatni pogoj, da je pripadajoči y n–mestno število.

Ugotovili smo, da premore enačba (1) za neskončno mnogo n rešitve x, y v naravnih številih. S tem seveda ni rečeno, da obstaja neskončno parov z lastnostjo (S). Vsak bralec pa se lahko sam prepriča, da sestavljata števili

$$x = \frac{64 \cdot 10^n + 24}{73} \quad \text{in} \quad y = \frac{24 \cdot 10^n + 9}{73}$$

par z lastnostjo (S), če je eksponent n oblike $8k + 2$, kjer je k poljubno nenegativno celo število. Torej je takih parov neskončno.

Kaj lahko povemo o paru x, y, ki je rešitev enačbe (1) pri nekem n, toda y ni n–mestno število? Iz (1*) razberemo, da je $2y - 1 < 10^n$, torej $y \leq \frac{1}{2} \cdot 10^n$. Zato ima y v desetiškem sestavu kvečjemu n mest. Je torej k–mestno število, pri čemer je $k \leq n$. Kadar je $k < n$, dobimo vsoto kvadratov $x^2 + y^2$ tako, da med številki za x in y vrinemo $n - k$ ničel.

V zgledu, navedenem na začetku, imata števili 88 in 33 obe števki enaki. Če postavimo dodatni pogoj, da morajo biti v desetiškem zapisu vse števke števila x med seboj enake in da mora isto veljati tudi za y, pa je $x = 88$ in $y = 33$ edini par s to lastnostjo.

Ivan Vidav

DOMAČA NALOGA – Rešitev s str. 280

a) Posvetimo se prvi ključavnici. Kombinacijo lahko sestavlja 5, 6 ali 7 znakov.
Če jo sestavlja 5 znakov, morajo biti to same števke. Takih možnosti je 10^5.
Če je sestavljena iz šestih znakov, jo lahko sestavlja 6 števk (10^6 možnosti) ali pa 5 števk in ena črka. Ker lahko stoji katerakoli od petih črk na kateremkoli od šestih mest, je drugih možnosti $6 \cdot 5 \cdot 10^5$.
Če je kombinacija sestavljena iz sedmih znakov, so to lahko ali same števke ali 6 števk in ena črka ali pa 5 števk in dve črki.
Tako imamo za prvo ključavnico

$$10^5 + 10^6 + 6 \cdot 5 \cdot 10^5 + 10^7 + 7 \cdot 5 \cdot 10^6 + 21 \cdot 5^2 \cdot 10^5$$

možnosti.
Za drugo ključavnico imamo eno možnost manj kot za prvo, saj ne sme imeti enake kombinacije kot prva. Za vsako naslednjo imamo še po eno možnost manj kot za prejšnjo. Torej je možnih

$$7 \cdot (10^5 + 10^6 + 6 \cdot 5 \cdot 10^5 + 10^7 + 7 \cdot 5 \cdot 10^6 + 21 \cdot 5^2 \cdot 10^5) - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6$$

kombinacij. To je 711199979 kombinacij.

b) Če tipka Scully eno kombinacijo 5 sekund, bi potrebovala za odpiranje treh ključavnic približno 48,33 let. Seveda le, če bi res tipkala, ne pa skrbela za svoje nohte. Mulder, ki tipka eno kombinacijo 4 sekunde, bi preostale štiri ključavnice odklepal kar 51,55 let.