PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **25** (1997/1998)
Številka 3
Strani 168–170

Marko Razpet:

VSOTA GEOMETRIJSKE VRSTE – PO GEOMETRIJSKO

Ključne besede: matematika, geometrijske vrste.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/25/1335-Razpet.pdf

© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

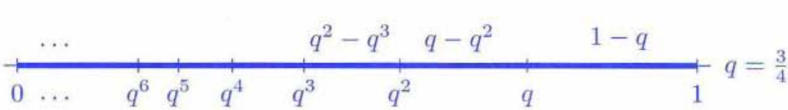
Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

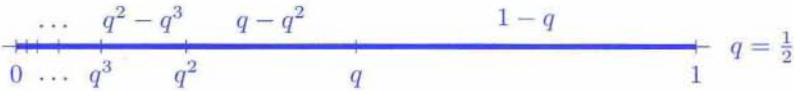
VSOTA GEOMETRIJSKE VRSTE – PO GEOMETRIJSKO

Vzemimo pozitivno število q, manjše od 1, kar lahko zapišemo s simboli takole: $0 < q < 1$. Njegov kvadrat, torej q^2, je tudi tako število, toda ta hip je pomembneje, da je $q^2 < q$. Po množenju obeh strani neenakosti $q < 1$ s pozitivnim q dobimo namreč neenakost $q^2 < q < 1$. Postopek nadaljujemo in najdemo zaporedje potenc:

$$0 < \ldots < q^{n+1} < q^n < \ldots < q^3 < q^2 < q < 1\,.$$

Zaporedje $1, q, q^2, q^3, \ldots$ je geometrijsko, saj je v zaporedju količnik poljubnega člena z njegovim predhodnikom enak q, torej stalen. Prvi člen tega zaporedja je 1. Člene zaporedja upodobimo na številski premici, kot prikazujeta sliki. Čim manjši je q, tem hitreje se potence q^n približujejo ničli:





Očitno členi zaporedja delijo interval $[0, 1]$ na vedno krajše podintervale, če gledamo z desne proti levi strani tega intervala. Prvi podinterval ima dolžino $1 - q$, drugi $q - q^2 = q(1 - q)$, tretji $q^2 - q^3 = q^2(1 - q)$ in tako naprej. Njihove dolžine sestavljajo zaporedje

$$1 - q, q(1 - q), q^2(1 - q), \ldots$$

ki je tudi geometrijsko zaporedje s količnikom q. Prvi člen je $1 - q$. Velja:

$$0 < \ldots < q^n(1 - q) < \ldots < q^2(1 - q) < q(1 - q) < 1 - q\,.$$

Prvi podinterval z desne ima dolžino $1 - q$, kar je manj od dolžine intervala $[0, 1]$, ki je dolg 1. Prva dva podintervala skupaj merita $(1 - q) + q(1 - q) = 1 - q^2$. Prvi trije imajo skupno dolžino $(1 - q) + q(1 - q) + q^2(1 - q) = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 = 1 - q^3$, po n korakih ugotovimo, da meri skupna dolžina prvih n podintervalov $1 - q^n$. Če seštejemo po vrsti dolžine dovolj velikega števila zaporednih podintervalov, se številu 1 približamo, kot le želimo, saj potenca q^n za dovolj velik n postane poljubno majhna. To zapišemo v obliki vsote, ki ima neskončno mnogo členov:

$$(1-q)+q(1-q)+q^2(1-q)+\ldots=1\,.$$

Tri pike (...) pomenijo, da se seštevanje členov nadaljuje v nedogled. Vsota vseh dolžin delnih intervalov, na katere členi zaporedja $q, q^2, \ldots$ delijo interval $[0,1]$, je seveda 1. Če v zgornji vsoti izpostavimo vsem členom skupni faktor $1-q$, dobimo

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+\ldots)=1\,,$$

od koder dobimo vsoto geometrijske vrste:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots=\frac{1}{1-q}\,. \tag{A}$$

Geometrijska vrsta ji pravimo zato, ker sestavljajo njeni členi geometrijsko zaporedje. Formula (A) je očitno pravilna tudi za $q=0$.

Primer:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\,.$$

Kaj pa, če je q negativen, toda po absolutni vrednosti manjši od 1? Tedaj pišemo $q=-r$, kjer je $0<r<1$. Geometrijsko vrsto preoblikujemo takole:

$$\begin{aligned}1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots&=1-r+r^2-r^3+r^4+\ldots=\\&=(1-r)+r^2(1-r)+r^4(1-r)+\ldots\end{aligned}$$

Izpostavimo faktor $1-r$ in dobimo:

$$1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots=(1-r)(1+r^2+r^4+\ldots)\,.$$

Vrsta $1+r^2+r^4+\ldots$ je geometrijska s količnikom $r^2<1$, njeno vsoto lahko izračunamo s formulo (A):

$$1+r^2+r^4+\ldots=\frac{1}{1-r^2}=\frac{1}{(1-r)(1+r)}\,.$$

Tako smo našli vsoto vrste:

$$1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots=(1-r)\,\frac{1}{(1-r)(1+r)}=\frac{1}{1+r}=\frac{1}{1-q}\,.$$

Formula (A) torej velja za vsako realno število q, $|q| < 1$.

Primer:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Za $|q| \geq 1$ geometrijska vrsta nima vsote. Res:

Za $q = 1$ imamo $1 + 1 + 1 + \ldots$ Ko seštejemo prva dva člena, dobimo vsoto 2, vsota prvih treh členov je 3 in tako naprej. Če nadaljujemo, očitno dobljena vsota sčasoma preseže še tako veliko pozitivno število.

Zanimiv je primer $q = -1$, ko imamo opravka z vrsto $1 - 1 + 1 - 1 + + \ldots$ Tedaj je vsota prvih dveh členov 0, vsota prvih treh 1, prvih štirih spet 0 in tako naprej. Táko zaporedje ničel in enic se seveda ne približuje nobenemu številu, četudi seštejemo še tako veliko število členov.

Kaj pa, če združujemo po dva in dva člena? Tedaj dobimo novo vrsto $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$. Kaj je pravilno? Izkaže se, da smemo člene vrste včasih združevati, včasih pa ne. Slednji primer je tak, ko tega ne smemo.

V izpeljavi smo združevali člene: $1 - r + r^2 - r^3 + r^4 + \ldots = (1 - r) + r^2(1 - r) + r^4(1 - r) + \ldots$ V tem primeru smo to storili upravičeno.

V primeru $|q| > 1$ potence q^n postanejo z rastočim eksponentom n po absolutni vrednosti vedno večje, torej geometrijska vrsta tudi tedaj nima vsote.

Marko Razpet

POENOSTAVI – Rešitev s str. 110

$$(1 - \frac{1}{1})(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \ldots (1 - \frac{1}{100}) = 0 \cdot \ldots = 0$$

in

$$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5}) \ldots (1 - \frac{1}{99}) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{98}{99} = \frac{1}{99}.$$

Marija Vencelj

PREMISLI IN ODGOVORI – Rešitev s str. 101

49 rib.

Marija Vencelj