

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 25 (1997/1998)

Številka 1

Strani 2-6

Marija Vencelj:

## MALA ŠOLA TOPOLOGIJE – 1. del

Ključne besede: matematika, topologija, topološke preslikave.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/25/1323-Vencelj.pdf>

© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

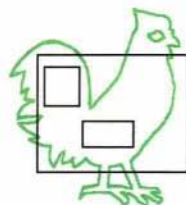
© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

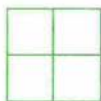
## MALA ŠOLA TOPOLOGIJE – 1. del

## Topološke preslikave

Za začetek si oglejmo naslednje risbe:



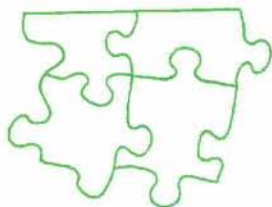
(a)



(b)



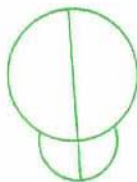
(c)



(d)



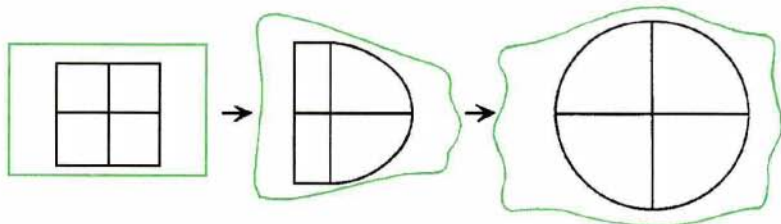
(e)



(f)

Ob njih si lahko zastavimo različne naloge, kakršna je npr. naloga poiskati razlike med risbami (nekatero risbe so npr. sestavljene iz samih daljic; druge ne). Nas bodo bolj zanimale lastnosti, ki so vsem risbam skupne. Ena takih lastnosti, ki jo zlahka opazimo, je, da vsaka risba razdeli ravnino na enako število celic ali področij.

Zamislimo si, da je risba (b) narisana na zelo tanko gumijasto opno, ki jo lahko raztegujemo, stiskamo in zvijamo po mili volji, ne smemo pa je raztrgati niti ne smemo zlepiti dveh ali več točk skupaj. Če opno primerno raztegnemo, kot prikazuje naslednja skica, lahko dosežemo, da preide risba (b) v risbo (a).



**Topologija**<sup>1</sup> je veja matematike, ki se ukvarja z različnimi množicami točk v prostoru (v naših primerih so to narisane figure). Zanimajo jo take lastnosti množic, ki se ohranjajo pri upogibanju, raztezanju ali krčenju (brez raztrganin ali lepljenja). Tako imajo risbe-krivulje na slikah (a) do (f) enake **topološke** lastnosti.

Topologije torej za razliko od sorodne geometrije ne zanimajo dolžine, ploščine, površine ali velikosti kotov; te lahko še poljubno spreminjamo.

Pri naši intuitivni obravnavi topologije se bomo omejili le na take množice, ki jih sestavljajo točke in krivulje. Pri tem se domenimo za uporabo nekaterih sicer splošno veljavnih izrazov.

- Upogibanja, raztezanja ali krčenja brez raztrganin ali lepljenja bomo imenovali **topološke preslikave**.
- Lastnosti, ki še vedno veljajo, potem ko množico topološko preslikamo, imenujemo **topološke invariante** ali **topološko nespremenljive vrednosti**. Tako je očitno medsebojni vrstni red točk topološka invarianta, ni pa topološka invarianta razdalja med dvema točkama.
- Dve krivulji, za kateri velja, da lahko drugo iz druge dobimo s topološko preslikavo, imenujemo **topološko ekvivalentni** ali **topološko enakovredni**.

Na primerih premislimo in utrdimo pomen teh pojmov.

- Katere od narisanih krivulj so topološko enakovredne krožnici? (Ne pozabimo, da ne smemo ničesar razrezati ali zleptiti!) Takim krivuljam pravimo **enostavno sklenjene krivulje**.



(a)



(b)



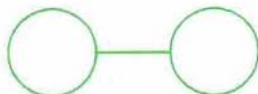
(c)



(d)



(e)



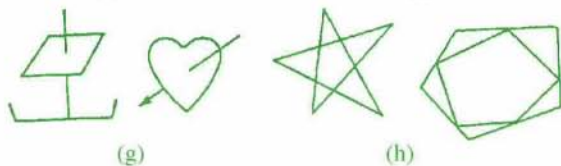
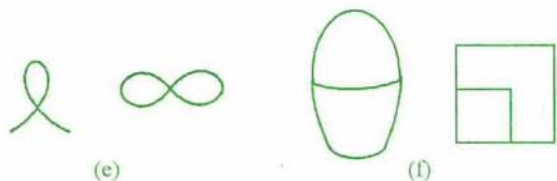
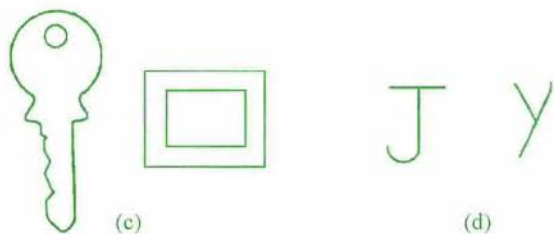
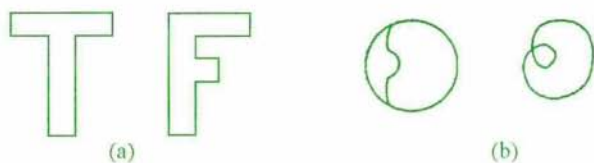
(f)



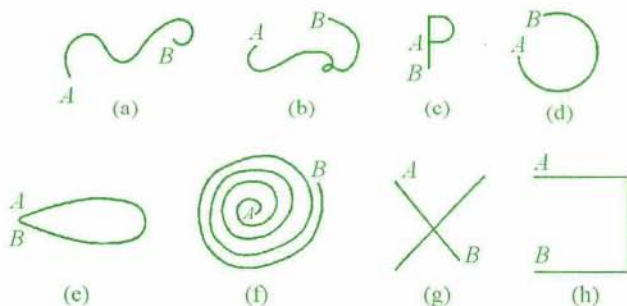
(g)

<sup>1</sup> Beseda topologija je grškega izvora: *τόπος* pomeni v grščini kraj. Topologija je torej nauk o kraju, o legi.

2. Na risbah je več parov krivulj. Ali lahko prvo krivuljo iz para topološko preslikamo v drugo krivuljo?



3. Katere od narisanih krivulj so topološko enakovredne daljici  $AB$ ?



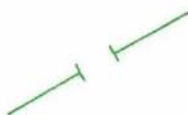
4. Katere med naslednjimi petimi risbami so topološko enakovredne?



(a)



(b)



(c)

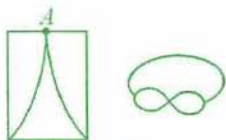


(d)

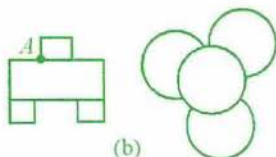


(e)

5. Med naslednjimi pari risb poišči take s topološko enakovrednimi risbami. Če se ti zdi, da sta risbi nekega para topološko enakovredni, označi na drugi od obeh risb možni položaj točke  $A'$ , ki je slika točke  $A$  pri topološki preslikavi. Če je za  $A'$  možnih več položajev, označi vse.



(a)



(b)



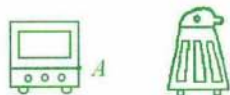
(c)



(d)



(e)



(f)

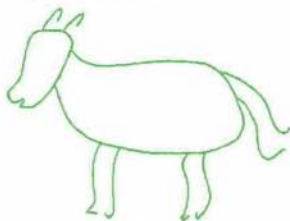
6. V kaj vse lahko spremenimo hrošča? Slika prikazuje originalnega žužka in dve ideji za njegovo topološko preobrazbo.



(a)

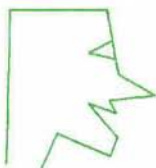


(b)

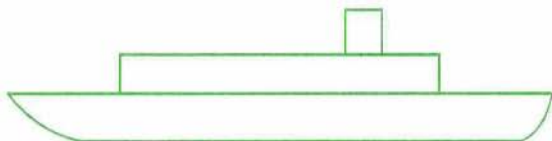


(c)

7. Nariši naslednjim risbam nekaj topološko enakovrednih risb. Poskusi najti tudi čimbolj preproste (oglej si sličico s petelinom ob naslovu tega prispevka).



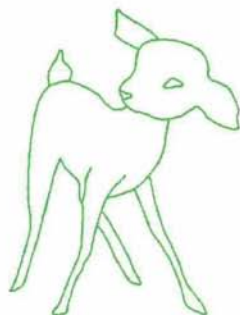
(a)



(b)



(c)



(d)

Nekaj odgovorov:

- (a), (d), (e), (g)
- (a) Da. (b) Ne. (c) Da. (d) Da. (e) Ne. (f) Da. (g) Da. (h) Da.
- (a), (d), (f), (h)
- (a), (b) in (d); (c) in (e)
- (a), (b), (c), (e), (f); točke poiščite sami.