PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **25** (1997/1998)
Številka 1
Strani 20–23

Jože Grasselli:

O ŠTEVILIH 11...1

Ključne besede: matematika, teorija števil, praštevila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/25/1323-Grasselli.pdf

O ŠTEVILIH 11...1

V zapisu števil

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ldots,\ 11\ldots1,\ldots \tag{1}$$

nastopa le števka 1. (Osnova je deset.) Ogledali si bomo dve njihovi lastnosti. Znak J_n naj pomeni število oblike (1) z n enkami, npr. $J_7 = 1\,111\,111$.

Prva lastnost se tiče deliteljev števil oblike (1). Vsa so liha, zato niso deljiva z 2; pa tudi s 5 ne, saj se ne končujejo na 0 ali 5. Za delitelje pridejo tako v poštev le števila tuja 10. In zanimivost:

A. *Vsako število, ki je tuje 10, je med delitelji števil oblike (1).*

Prepričajmo se!

Naj bo n naravno število, večje od 1 in tuje 10. Poglejmo števila

$$J_1,\ J_2,\ J_3,\ldots,\ J_n,\ J_{n+1}\,. \tag{2}$$

Po delitvi z n jih lahko zapišemo

$$J_1 = k_1 n + r_1,\ J_2 = k_2 n + r_2,\ldots,\ J_n = k_n n + r_n,\ J_{n+1} = k_{n+1} n + r_{n+1}\,. \tag{3}$$

Kvocienti $k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}$ so nenegativna cela števila, ostanki $r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}$ imajo vrednosti med števili

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1\,. \tag{4}$$

Števil (2) je $n+1$, ostankov (4) je možnih le n. Zato morata vsaj dva ostanka v (3) imeti isto vrednost. Naj bo npr.

$$r_t = r_s\,; \quad 1 \le s < t \le n+1\,, \tag{5}$$

torej sledi

$$J_t - J_s = (k_t - k_s)n\,.$$

Po drugi strani velja

$$J_t - J_s = 10^s \cdot J_{t-s}\,.$$

Sledi

$$(k_t - k_s)n = 10^s \cdot J_{t-s}\,. \tag{6}$$

Po privzetku je n tuj številu 10. Zato (6) pove, da n deli J_{t-s}. Toda to je eno od števil $J_1, J_2, \ldots, J_n$, saj je $1 \le t-s \le n$ zaradi (5). Trditev A je dognana.

Ugotovitev A velja seveda posebej za vsako praštevilo, različno od 2 in 5. To pomeni, da se med prafaktorji števil (1) nahajajo vsa praštevila razen 2 in 5.

Praštevilski razcep začetnih števil iz (1) navaja preglednica:

$$
\begin{aligned}
J_2 &= 11 = 11\\
J_3 &= 111 = 3\cdot 37\\
J_4 &= 1\,111 = 11\cdot 101\\
J_5 &= 11\,111 = 41\cdot 271\\
J_6 &= 111\,111 = 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37\\
J_7 &= 1\,111\,111 = 239\cdot 4649\\
J_8 &= 11\,111\,111 = 11\cdot 73\cdot 101\cdot 137\\
J_9 &= 111\,111\,111 = 3^2\cdot 37\cdot 333667\\
J_{10} &= 1\,111\,111\,111 = 11\cdot 41\cdot 271\cdot 9091
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Videli smo, da je pri n tujem 10 vsaj eno od števil $J_1, J_2, \ldots, J_n$ deljivo z n. Najmanjši indeks, za katerega to velja, zaznamujemo s $c(n)$. Iz prvih treh vrstic v (7) izhaja, da 101 ni delitelj za $J_1 = 1$, J_2, J_3, pač pa 101 deli J_4. Zato je $c(101) = 4$.

Ker je med števili $J_1, J_2, \ldots, J_n$ vsaj eno, ki je deljivo z n, je izpolnjena ocena

$$c(n) \leq n\,. \tag{8}$$

S pomočjo (7) sestavimo preglednico števil $c(n)$ za n, $1 < n \leq 41$, ki so tuja 10; kjer $c(n)$ iz (7) ni razviden, je postavljen vprašaj:

$$
\begin{array}{cccc}
c(3)=3 & c(13)=6 & c(23)=? & c(33)=6\\
c(7)=6 & c(17)=? & c(27)=? & c(37)=3\\
c(9)=9 & c(19)=? & c(29)=? & c(39)=6\\
c(11)=2 & c(21)=6 & c(31)=? & c(41)=5
\end{array}
\tag{9}
$$

Pri vprašajih lahko z računom preverimo, da je:

$$
\begin{array}{ccc}
c(17)=16 & c(23)=22 & c(29)=28\\
c(19)=18 & c(27)=27 & c(31)=15
\end{array}
\tag{10}
$$

Ker je zaradi (9) in (10)

$$c(3) = 3 \qquad c(9) = 9 \qquad c(27) = 27\,,$$

ocene (8) ne moremo izboljšati. V podrobnejši opis, kako je $c(n)$ odvisen od n, se ne bomo spuščali.

Obrnimo se k drugi lastnosti števil (1).

Naslonili se bomo na znano dejstvo: Če je naravno število a večje od 1 in tuje 10, je decimalni zapis za $\frac{1}{a}$ čisto periodičen. Npr. $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ in dolžina (osnovne) periode je ena; $\frac{1}{101} = 0{,}\overline{0099}$ in dolžina periode je štiri.

V nadaljnjem naj bo q praštevilo, večje od tri. Če je p táko praštevilo, da ima $\frac{1}{p}$ dolžino periode enako q, je

$$\frac{1}{p} = 0{,}\overline{c_1 c_2 \ldots c_q} \tag{11}$$

in števke $c_1, c_2, \ldots, c_q$ so vzete med vrednostmi $0, 1, 2, \ldots, 9$. Ker ima $\frac{1}{3}$ periodo dolžine ena, dolžina periode v (11) pa je $q \geq 5$, je $p \neq 3$. Če $\frac{1}{p}$ množimo z 10^q in nato odštejemo $\frac{1}{p}$, dobimo iz (11)

$$\frac{10^q - 1}{p} = c_1 \cdot 10^{q-1} + c_2 \cdot 10^{q-2} + \ldots + c_q\,.$$

Če označimo naravno število na desni z b, je

$$10^q - 1 = bp$$

in zaradi $10^q - 1 = 9J_q$ tudi

$$9J_q = bp\,.$$

Dobljena enakost pove, da p deli $9J_q$; potem pa p deli J_q, saj za praštevilo p velja $p \neq 3$.

Tako smo ugotovili: Vsako praštevilo p, pri katerem je dolžina periode števila $\frac{1}{p}$ enaka praštevilu $q \geq 5$, je faktor v J_q. Z nekaj več priprave je mogoče dognati: Če je q praštevilo nad tri in praštevilo p faktor v J_q, je dolžina periode števila $\frac{1}{p}$ enaka q.

Z drugimi besedami:

B. *Če je praštevilo q večje od tri, se praštevila p, za katera ima $\frac{1}{p}$ dolžino periode q, natančno ujemajo s prafaktorji števila J_q.*

Vzemimo kot zgled $q = 5$. Iz (7) vidimo, da je J_5 produkt prafaktorjev 41 in 271. Velja

$$\frac{1}{41} = 0{,}\overline{02439}$$
$$\frac{1}{271} = 0{,}\overline{00369}$$

in števili $\frac{1}{41}$, $\frac{1}{271}$ imata res dolžino periode enako pet; po trditvi B sta 41, 271 edini praštevili p, za kateri ima $\frac{1}{p}$ dolžino periode pet.

Opomba. Kadar n ni praštevilo, nastopajo v J_n tudi prafaktorji p, pri katerih je dolžina periode števila $\frac{1}{p}$ manjša od n. Po (7) ima J_8 prafaktorje 11, 73, 101, 137. Tu je

$$\frac{1}{11} = 0{,}\overline{09}$$
$$\frac{1}{101} = 0{,}\overline{0099}$$
$$\frac{1}{73} = 0{,}\overline{01369863}$$
$$\frac{1}{137} = 0{,}\overline{00729927}$$

in pojavljajo se periode dolžin 2, 4 in 8.

Naloge.

1. Pokaži, da za $n \geq 2$ velja $\frac{1}{J_n} = 0{,}\overline{0\ldots09}$ z dolžino periode n.
2. Če je n sestavljeno število, $n = ab$, $1 < a < b < n$, je J_n deljiv z J_a in J_b; torej tudi z najmanjšim skupnim večkratnikom števil J_a in J_b.
3. Število J_n je praštevilo kvečjemu tedaj, ko je n praštevilo. (Pri $n < 113$ se to zgodi le za $n = 2, 19, 23$.)
4. Prepričaj se, da je $c(17) = 16$.
5. Z indukcijo doženi, da je $c(3^j) = 3^j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$.

Jože Grasselli

TEMELJITOST

Učitelj: Kaj še vedno nisi seštel teh treh števil?
Učenec: O ja, že desetkrat!
Učitelj: Lepo! Rad imam temeljite učence.
Učenec: Hvala. Tu je vseh deset rezultatov!

Marija Vencelj