PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **24** (1996/1997)
Številka 6
Strani 346–351

Ivan Lisac:

O RAČUNOVODSKEM PRAVILU

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/24/1320-Lisac.pdf

O RAČUNOVODSKEM PRAVILU

Dostikrat se znajdemo pred nalogo, kako sešteti podano končno vsoto. Vzemimo najprej naslednji vsoti in ju seštejmo brez dokazovanja:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \tag{1}$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

To sta znani formuli za vsoto prvih n naravnih števil in kvadratov prvih n naravnih števil (glej tudi sestavek Vsota potenc naravnih števil v 1. številki Preseka).

Vzemimo kak težji primer. Kolikšna je na primer vrednost vsote

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}\ ? \tag{3}$$

Na prvi pogled je najbrž ne znamo preprosto ugnati. Včasih si pri podobnih nalogah pomagamo s primerno *interpretacijo* členov v dani vsoti. Poskusimo to storiti z vsoto (3).

Binomski simbol $\binom{n}{k}$ je število k-elementnih podmnožic množice z n elementi. V vsoti (3) nastopa ob binomskem simbolu $\binom{n}{k}$ število k. Kakšen pomen pa ima tu k? In produkt $k\binom{n}{k}$? Premislimo. Gre za neki odnos med elementi in podmnožicami. Ker je vseh k-elementnih podmnožic $\binom{n}{k}$, nam produkt $k\binom{n}{k}$ pove, kolikokrat je resnična izjava *'element a pripada množici X'*, ko preteče a osnovno množico z močjo n, X pa vse podmnožice z močjo k.

Vidimo torej, da gre tu za odnos *'pripada'* ($\in$). Preden seštejemo vsoto (3), pa razmislek posplošimo.

Računovodsko pravilo. Naj bosta A, B končni množici in $R\subseteq A\times B$ poljubna podmnožica kartezičnega produkta $A\times B$. Podmnožici R pravimo tudi *relacija*.

Če je $R(a)=\{b\in B \mid a\ R\ b\}$ in $R^{-1}(b)=\{a\in A \mid a\ R\ b\}$ in označujejo $|R|$, $|R(a)|$, $|R^{-1}(b)|$ moči množic R, $R(a)$ in $R(b)$, potem je

$$|R|=\sum_{a\in A}|R(a)|=\sum_{b\in B}|R^{-1}(b)|. \tag{4}$$

Kot običajno smo z znakom $\sum_{a\in A}|R(a)|$ označili vsoto števil $|R(a)|$, ko a preteče množico A, in podobno v ostalih primerih.

Zgornjo trditev najlažje ilustriramo ob sliki 1. Zapišimo elemente množice A v skrajni levi stolpec, elemente množice B pa v zgornjo vrstico. Če sta elementa a in b v relaciji R ($a\ R\ b$), zapišimo na križišče ustrezne vrstice in stolpca enico, sicer postavimo tja ničlo. Potem so tri števila iz enakosti (4) zaporedoma: skupno število enic, vsota enic, šteta po vrsticah, in vsota enic, šteta po stolpcih ($2+1+1+2=2+3+1=6$). Ta tri števila so enaka, zato enakost (4) velja.

	b_1	b_2	b_3	b_4	$\sum$
a_1	0	0	1	1	2
a_2	1	1	0	1	3
a_3	1	0	0	0	1
$\sum$	2	1	1	2	6

Slika 1. $R(a_1)=\{b_3,b_4\}, R(a_2)=\{b_1,b_2,b_4\}, R(a_3)=\{b_1\}$.

Vrnimo se sedaj k uvodnemu problemu. Definirajmo množici A in B ter relacijo R takole:

$$A=\{1,2,\ldots,n\} \qquad B=\mathcal{P}(A)=\{X|X\subseteq A\} \qquad a\,R\,b \Longleftrightarrow a\in b.$$

Za tako definirane A,B in R bomo uporabili računovodsko pravilo.

Vzemimo $a\in A$ in izračunajmo $|R(a)|$! V množici $R(a)$ so tiste množice iz B, ki vsebujejo element a. Koliko jih je? Ker so vse oblike $X\cup\{a\}$, kjer je $X\subseteq A\backslash\{a\}$ (zakaj?), jih je toliko kot podmnožic množice $A\backslash\{a\}$, teh pa je 2^{n-1}. Nato še za $b\in B$ izračunajmo $|R^{-1}(b)|$. Množica b premore $|b|$ elementov, zato je $|R^{-1}(b)|=|b|$. Iz računovodskega pravila (4) sledi:

$$|R|=\sum_{a\in A}2^{n-1}=\sum_{b\in B}|b|.$$

Levo vsoto sestavlja n členov enakih 2^{n-1}, v desni združimo člene glede na moč množice b in dobimo:

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}.$$

Vsoto (3) smo torej sešteli.

Osnovna ideja računovodskega pravila je, da preštejemo moč relacije R na dva načina. S primerno izbiro množic A,B in R lahko dobimo zanimive enakosti. Poiščimo jih še nekaj.

- Naj bo $A = B = \{1, 2, \ldots, n\}$ in $a\ R\ b \iff a \leq b$. Potem je med 1 in n takih števil, ki so manjša ali enaka a, ravno a; števil večjih od b, pa je $n - b + 1$. To vstavimo v (4) in dobimo

$$\sum_{a=1}^{n} a = \sum_{b=1}^{n} (n - b + 1).$$

Ker tečeta a in b v obeh vsotah po istih številih, lahko v drugi vsoti namesto b pišemo a, ga prenesemo na levo in izračunamo novo desno vsoto:

$$2\sum_{a=1}^{n} a = \sum_{a=1}^{n} (n + 1) = n(n + 1). \tag{5}$$

Če enačbo (5) še delimo z 2, dobimo vsoto (1).

- Naj bo tokrat

$$A = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad B = A \times A \qquad a\ R\ (b_1, b_2) \iff a \leq b_1 \text{ in } a \leq b_2.$$

Elementi množice B so v tem primeru pari števil. Parov (b_1, b_2), pri katerih sta obe komponenti večji ali enaki a, je $(n - a + 1)^2$ (zakaj?). Če pa je dan par (b_1, b_2), taka števila a, da velja $a \leq b_1$ in $a \leq b_2$, kar naštejmo: to so $1, 2, \ldots, b_1$, če je $b_1 \leq b_2$, in $1, 2, \ldots, b_2$, če je $b_2 \leq b_1$. V splošnem jih je torej $\min(b_1, b_2)$, kjer $\min(b_1, b_2)$ označuje manjše od števil b_1 in b_2. Sedaj dobimo iz (4):

$$\sum_{a=1}^{n} (n - a + 1)^2 = \sum_{b_1=1}^{n} \sum_{b_2=1}^{n} \min(b_1, b_2). \tag{6}$$

Leva vsota v (6) je pravzaprav vsota kvadratov prvih n naravnih števil, torej leva stran enakosti (2). Poglejmo še desno vsoto. Razstavimo jo takole:

$$\sum_{b_1=1}^{n} \sum_{b_2=1}^{n} \min(b_1, b_2) = \sum_{b_1 < b_2} b_1 + \sum_{b_2 < b_1} b_2 + \sum_{b_1 = b_2} b_1. \tag{7}$$

V (7) sta na desni strani prvi dve vsoti enaki, zato izračunajmo le eno:

$$\sum_{b_1=1}^{n} \sum_{b_2=b_1+1}^{n} b_1 = \sum_{b_1=1}^{n} b_1(n - b_1) = n\sum_{b_1=1}^{n} b_1 - \sum_{b_1=1}^{n} b_1^2. \tag{8}$$

V (8) seštevamo le še prvih n naravnih števil in kvadrate prvih n naravnih števil, zato iz (6), (7) in (8) sledi

$$3\sum_{b_1=1}^{n} b_1^2 = (2n+1)\sum_{b_1=1}^{n} b_1. \tag{9}$$

Iz (9) in (1) pa z deljenjem s 3 sledi enakost (2).

• Za naravno število n označimo z $D(n)$ množico vseh deliteljev števila n. Definirajmo:

$$A = D(n) \qquad B = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad a\, R\, b \Longleftrightarrow a \mid b.$$

Poglejmo, kaj dobimo v tem primeru. Naj bo a delitelj števila n. Vsa z a deljiva števila, ki ležijo med 1 in n, so:

$$a, 2a, 3a, \ldots, \frac{n}{a}a. \tag{10}$$

V (10) je natančno $\frac{n}{a}$ števil. Naj bo sedaj b število iz množice B. Koliko je deliteljev števila n, ki delijo število b? Delitelji števila n, ki delijo tudi število b, so *skupni delitelji* obeh števil. Vse skupne delitelje števil b in n bomo dobili, če bomo opazovali delitelje največjega skupnega delitelja obeh števil, torej množico $D(d(b,n))$. Tu $d(b,n)$ označuje največji skupni delitelj števil b in n. Uvedimo še dve oznaki: če je n naravno število, naj bo $\tau(n)$ število njegovih deliteljev, $\sigma(n)$ pa vsota vseh deliteljev števila n. Primer:

$$\tau(6) = |\{1, 2, 3, 6\}| = 4,\ \sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

Sedaj lahko odgovorimo na gornje vprašanje. Deliteljev števila n, ki delijo tudi število b, je $\tau(d(b,n))$. Uporabimo (4):

$$\sum_{a|n} \frac{n}{a} = \sum_{b=1}^{n} \tau(d(b,n)). \tag{11}$$

Ker pa je

$$\sum_{a|n} \frac{n}{a} = \sum_{a|n} a \tag{12}$$

(delitelji so v (12) samo našteti v obratnem vrstnem redu), dobimo iz (11) in (12)

$$\sigma(n) = \sum_{b=1}^{n} \tau(d(b,n)).$$

Preskusimo enačbo za $n = 6$:

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \tau(2) + \tau(1) + \tau(6) = 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 4 = 12 = \sigma(6).$$

- Vzemimo sedaj

$$A = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad B = A \times A \qquad a\; R\; (b_1, b_2) \Longleftrightarrow a = b_1 b_2.$$

Naj bo $a \in A$. Koliko takih parov (b_1, b_2) obstaja, da je $a = b_1 b_2$? Opazimo, da je par (b_1, b_2) določen že z izbiro delitelja b_1, saj je $b_2 = \frac{a}{b_1}$. Vseh parov je torej toliko, kot je deliteljev števila a, teh pa je $\tau(a)$. Poglejmo še obratno. Za vsak par $(b_1, b_2) \in B$ obstaja le eno tako število a, da je $a = b_1 b_2$, to je $b_1 b_2$. Toda produkt $b_1 b_2$ mora ležati v A, če naj bo $b_1 b_2\; R\; (b_1, b_2)$. Zato je

$$|R^{-1}((b_1, b_2))| = \begin{cases} 1, & \text{če je } b_1 b_2 \leq n \\ 0, & \text{če je } b_1 b_2 > n \end{cases}.$$

Vstavimo zadnja dva rezultata v (4). Dobimo:

$$\sum_{a=1}^{n} \tau(a) = \sum_{b_1=1}^{n} \sum_{b_2=1}^{n} \begin{cases} 1, & \text{če je } b_1 b_2 \leq n \\ 0, & \text{če je } b_1 b_2 > n \end{cases}. \tag{13}$$

Če v (13) fiksiramo b_1, potem zadoščajo neenačbi $b_2 \leq \frac{n}{b_1}$ naslednja števila iz množice A:

$$1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor, \tag{14}$$

kjer smo z $\lfloor x \rfloor$ označili največje celo število, ki je manjše ali enako številu x. Iz (14) sledi

$$\sum_{b_1=1}^{n} \sum_{b_2=1}^{n} \begin{cases} 1, & \text{če je } b_2 \leq \frac{n}{b_1} \\ 0, & \text{če je } b_2 > \frac{n}{b_1} \end{cases} = \sum_{b_1=1}^{n} \sum_{b_2=1}^{\lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor} 1 = \sum_{b_1=1}^{n} \lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor. \tag{15}$$

Iz (13) in (15) dobimo

$$\sum_{a=1}^{n} \tau(a) = \sum_{b_1=1}^{n} \lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor. \tag{16}$$