O CATALANOVI DOMNEVI

Naravni števili 8 in 9 sta zaporedni, $8+1=9$; prvo $8=2^3$ je kub naravnega števila 2, drugo $9=3^2$ kvadrat naravnega števila 3. Kvadratov $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots$ in prav tako kubov $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \ldots$ je neskončno. Toda 8 in 9 imata neko posebnost.

Če opazujemo naravna števila do 1000, vidimo, da razen primera 8, 9 za kubom nikoli ne pride kvadrat. Ali se to zgodi pri številih nad 1000? Kub naravnega števila y je y^3, naslednje naravno število je y^3+1. Če naj bo kvadrat, mora veljati

$$y^3+1=x^2 \tag{1}$$

pri naravnih x, y. Enačba (1) pa razen $x=3$, $y=2$ ne premore nobene druge naravne rešitve. To je leta 1738 dognal L. Euler (1707–1783). Naravni števili 8, 9 sta tako edini, ko kubu sledi kvadrat. V tem je njuna posebnost.

Ali lahko za kvadratom sledi kub? Tedaj mora biti

$$y^2+1=x^3\,. \tag{2}$$

Da se ta enačba v naravnih številih ne da izpolniti, je prav tako ugotovil Euler. Kvadratu torej nikoli ne sledi kub.

Dokaz Eulerjevih ugotovitev ni preprost. Povzemimo:

A. *Od dveh zaporednih naravnih števil je manjše kub in večje kvadrat le v primeru 8, 9; nikdar pa ni manjše kvadrat in večje kub.*

Potenca a^b je prava, če sta a, b od ena večji naravni števil. Pravih potenc je neskončno, mednje spadajo vsi kvadrati in kubi razen 1. Poraja se vprašanje: Ali sta poleg 8, 9 še kateri pravi potenci zaporedni naravni števili?

Belgijski matematik Eugène Catalan (1814–1894) je bil prepričan, da je odgovor na zastavljeno vprašanje ne. Leta 1844 je ena takrat še redkih matematičnih revij objavila Catalanovo javno pismo, v katerem med drugim beremo:

"Zaporedni naravni števili, različni od 8 in 9, ne moreta biti pravi potenci. Drugače povedano: Enačba

$$x^m-y^n=1\,, \tag{3}$$

v kateri so neznanke naravna števila, ima eno samo rešitev."

Ta trditev se imenuje Catalanova domneva. Ker gre v (3) za pravi potenci x^m, y^n, so vrednosti neznank x, y, m, n večje od 1. (Če je od eksponentov m, n vsaj eden enak 1, ima enačba (3) neskončno rešitev v naravnih številih.) Rešitev, o kateri govori trditev, je $x = n = 3$, $y = m = 2$; pripadata ji pravi potenci 9, 8. Catalan je pripomnil, da trditve ne more popolnoma dokazati in da bodo imeli drugi morda pri tem več sreče. No, do danes se to še ni zgodilo.

Enačbe (3) so se lotevali največ tako, da so eno ali dve neznanki izbrali in za poenostavljeno enačbo dokazovali Catalanovo domnevo. Izbira $m = 2$, $n = 3$ pripelje npr. do enačbe (1), $m = 3$, $n = 2$ do enačbe (2). Obravnavajmo nekaj takšnih zgledov.

a) Za $m = n \geq 2$ preide enačba (3) v

$$x^m - y^m = 1 . \tag{4}$$

Pri $x \leq y$ je $x^m - y^m \leq 0$. Če torej obstaja rešitev za (4), mora biti $x > y$. Ker naj bosta x, y naravni števili, pri naravnem številu c velja $x = y + c$. Po binomskem izreku je potem

$$x^m - y^m = (y + c)^m - y^m = my^{m-1}c + \ldots + myc^{m-1} + c^m .$$

Vsota na koncu vsebuje m seštevancev, ki so naravna števila. Ker je $m \geq 2$, je njena vrednost vsaj 3. To pomeni, da se enačba (4) pri $m \geq 2$ v naravnih številih ne da izpolniti.

Sedaj takoj vidimo, da za enačbo

$$x^{2^j} - y^{2^k} = 1 , \tag{5}$$

kjer sta j, k naravni števili, ni naravnih rešitev. Res! Če je $j = k$, imamo opraviti z enačbo (4); zanjo pa že vemo, da ne premore naravnih rešitev. Pri $j > k$ lahko (5) zapišemo

$$\left(x^{2^{j-k}}\right)^{2^k} - y^{2^k} = 1$$

in naravni števili $x^{2^{j-k}}$, y, bi dali rešitev za (4) pri $m = 2^k$. Ne gre. Podobno odpravimo še $j < k$. Zato:

B. Pravi potenci x^m, y^m nikoli nista zaporedni naravni števili. Enako velja za pravi potenci x^{2^j}, y^{2^k}.

b) Za $x = 3$, $y = 2$ dobi enačba (3) obliko $3^m - 2^m = 1$ ali

$$3^m - 1 = 2^n \,. \tag{6}$$

Iščemo rešitev, ko sta m, n naravni števili in $m \geq 2$, $n \geq 2$.

Naj bo najprej $m \geq 3$. Tak m je ali deljiv z lihim praštevilom ali pa je prava potenca števila 2.

Če je m deljiv z lihim praštevilom p, je $m = tp$, kjer je t naravno število. Levo stran v (6) razstavimo

$$3^{tp} - 1 = (3^t - 1)(3^{t(p-1)} + 3^{t(p-2)} + \ldots + 3^t + 1) \,. \tag{7}$$

V zadnjem oklepaju je p lihih naravnih števil, njihova vsota v je zato liho število nad 1. Po (7) je v delitelj za $3^m - 1$. Če bi veljalo (6), bi liho število $v > 1$ delilo 2^n. To ne gre. V (6) torej $m = tp$, kjer je p liho praštevilo, ni mogoče.

Naj bo zdaj m prava potenca števila 2, $m = 2^s$, kjer je s naravno število nad 1. Enakost (6) je tedaj

$$3^{2^s} - 1 = 2^n \,. \tag{8}$$

Z indukcijo lahko preverimo, da je pri $s \geq 2$ leva stran v (8) deljiva s 5. Toda desna stran 2^n v (8) nima nikdar delitelja 5. Zato pri m, ki je prava potenca števila 2, enakost (8) ne more držati.

Ostane še $m = 2$. Takrat se (6) glasi $3^2 - 1 = 2^n$ ali $8 = 2^n$ in $n = 3$. To rešitev že poznamo. Sklep:

C. *Pravi potenci 2^n, $n \neq 3$, nikoli ne sledi prava potenca 3^m.*

c) Za $m = y$, $n = x$ iz (3) izhaja

$$x^y - y^x = 1 \,. \tag{9}$$

Na desni stoji liho število. Razlika naravnih števil x^y, y^x je liha le, če je x sod in y lih ali pa x lih in y sod. Ta opazka omogoča dokazati, da je $x = 3$, $y = 2$ edina rešitev za (9) v naravnih številih. (Za sodi x je dokaz enostaven, ne tako za lihi x.) Zanimiv dokaz, da ni naravnih števil x, y, $x \neq 3$, $y \neq 2$, ustrezajočih enačbi (9), je našel G. Skandalis leta 1982. Dokaz poteka takole:

Indukcija potrdi, da je

$$2^x > 2x + 2 \qquad \text{pri naravnem } x \geq 4 \,.$$

Od tod z indukcijo sledi

$$2^x - x^2 > 1 \qquad \text{pri naravnem } x \geq 5\,. \tag{10}$$

Zaradi $y^x - x^y = -(x^y - y^x)$ je absolutna vrednost

$$|x^y - y^x| \tag{11}$$

neobčutna za zamenjavo x z y. Zato smemo v (11) privzeti, da je $x > y$, saj $x = y$ ne pride v poštev. V nadaljnjem naj bosta x, y naravni števili in $x > y \geq 2$. Pokazati je treba, da je $|x^y - y^x| \neq 1$ za $x \neq 3$, $y \neq 2$.

Če je $x = 4$, $y = 3$, je $|4^3 - 3^4| = 17 \neq 1$.

Če je $x \geq 5$, $y = 2$, je $|x^2 - 2^x| \neq 1$ zaradi (10).

Ostane še možnost $y \geq 3$.

Spomnimo se, da $(1+\frac{1}{s})^s$ vztrajno raste in je pod $e = 2,718\ldots < 2{,}8$, ko se s veča proti neskončno po pozitivnih (ne nujno celih) številih. Za pozitivno število r in $\frac{r}{s} = \frac{1}{f}$ velja

$$\left(1 + \frac{r}{s}\right)^s = \left(1 + \frac{1}{f}\right)^{fr} < e^r \tag{12}$$

pri vsakem pozitivnem s in r.

Ker je $x > y \geq 3$, je $z = x - y$ naravno število. Po (12) je $(1+\frac{z}{y})^y < e^z$ in dobimo

$$\frac{y^x}{x^y} = \frac{y^{z+y}}{(y+z)^y} = \frac{y^z}{\left(1 + \frac{z}{y}\right)^y} > \left(\frac{y}{e}\right)^z > \frac{3}{2{,}8} = 1 + \frac{1}{14} > 1 + \frac{1}{x^y}\,. \tag{13}$$

Na koncu upoštevamo, da je $1/(x^y) \leq 1/(4^3) = 1/64 < 1/14$ pri $y \geq 3$ in $x > y$. Po množenju z x^y se iz (13) najde

$$|x^y - y^x| > 1 \qquad \text{za vse } x > y \geq 3\,.$$

Zato velja

D. Če sta x, y naravni števili nad 1 in ni $x = 2$, $y = 3$ ali $x = 3$, $y = 2$, naravni števili x^y, y^x nista sosednji.

č) Izbira $n = 2$ v (3) pripelje do enačbe

$$x^m - y^2 = 1\,. \tag{14}$$

Zanjo je V. A. Lebesgue leta 1850 pokazal, da ne premore naravne rešitve, pri kateri bi bilo $m \geq 2$. Na trši oreh naletimo pri enačbi

$$x^2 - y^n = 1\,, \tag{15}$$

ki jo daje (3) za $m = 2$. Z naslonitvijo na nekatera prejšnja dognanja je dokazal Chao Ko leta 1964, da je $x = 3$, $y = 2$, $n = 3$ edina rešitev za (15) v naravnih številih večjih od ena. Po teh ugotovitvah trditev A razširjamo na

E. V zaporedju naravnih števil za kvadratom nikoli ne pride prava potenca; pa tudi pravi potenci ne sledi kvadrat razen v primeru 8, 9.

Povrnimo se k enačbi (3). Recimo, da je pri naravnih številih a, b, m, n, ki so vsa nad ena

$$a^m - b^n = 1\,. \tag{16}$$

Zaradi B števili m, n ne moreta biti enaki in tudi ne potenci števila 2. Za m, n so tako le tri možnosti:

i) $m = gp$, $n = 2^u$ in g, u naravni števili, p liho praštevilo

ii) $m = 2^v$, $n = hq$ in h, v naravni števili, q liho praštevilo

iii) $m = gp$, $n = hq$ in g, h naravni števili, p, q lihi praštevili.

Če velja prva možnost, lahko (16) zapišemo

$$(a^g)^p - \left(b^{2^{u-1}}\right)^2 = 1$$

in kvadratu $(b^{2^{u-1}})^2$ bi sledila prava potenca $(a^g)^p$. Po E to ne gre in prva možnost odpade.

Pri drugi možnosti (16) preoblikujemo v

$$\left(a^{2^{v-1}}\right)^2 - (b^h)^q = 1$$

in pravi potenci bi sledil kvadrat. Po E gre to le, ko je $a^{2^{v-1}} = 3$, $b^h = 2$, $q = 3$ in tako $v = 1$, $a = 3$, $h = 1$, $b = 2$, $q = 3$. S tem je tudi druga možnost odpravljena.

Ob tretji možnosti (16) izrazimo

$$(a^g)^p - (b^h)^q = 1$$

in $x = a^g$, $y = b^h$ je naravna rešitev za enačbo

$$x^p - y^q = 1\,, \tag{17}$$

v kateri sta p, q različni lihi praštevili. (Za $p = q$ preide enačba (17) v enačbo (4); zanjo B potrjuje, da nima naravnih rešitev.)

Velja torej

F. Če sta pravi potenci, ki nista 8, 9, zaporedni naravni števili, ju lahko zapišemo kot potenci z različnima lihima praštevilskima eksponentoma.

J. W. S. Cassels je okrog leta 1960 odkril, da imajo rešitve enačbe (17) lastnost

G. Če lihi praštevili p, q in naravni števili x, y povezuje enačba $x^p - y^q = 1$, p deli y in q deli x.

Na podlagi ugotovitve G so našli precej lihih praštevilskih parov p, q, ko ni naravnih x, y, ustrezajočih enačbi (17).

Strnimo gornje vrstice:

Znani so mnogi pari naravnih števil m, n, ko enačba (3) nima naravnih rešitev x, y; prav tako razni pari naravnih števil x, y, ko ni naravnih m, n, da bi veljalo (3). Razen $x = 3$, $m = 2$, $y = 2$, $n = 3$ za enačbo (3) ni bila najdena še nobena druga rešitev v naravnih številih, večjih od ena.

Catalanova domneva bi bila takoj razjasnjena, če bi ugotovili, koliko naravnih rešitev ima enačba (3). Kaj je bilo doseženo v tej smeri?

C. L. Siegel (1896–1981) je leta 1929 dokazal: Če sta naravni števili $m \geq 2$, $n \geq 2$ izbrani, je kvečjemu končno mnogo parov naravnih števil x, y, ki izpolnijo enačbo (3). Tako npr. $x^3 - y^7 = 1$ ali nima naravne rešitve ali pa je takih rešitev le končno mnogo; podobno enačba $x^{11} - y^{17} = 1$ in tako naprej. Število rešitev enačbe (3) bi kljub Siegelovi ugotovitvi moglo biti neskončno. Za m, n je namreč treba upoštevati neskončno parov (mimo onih, za katere se ve, da ni rešitev). Do napredka je prišlo leta 1976, ko je R. Tijdeman dognal

H. Vsako od naravnih števil $m \geq 2$, $n \geq 2$, x, y. ki jih veže pogoj $x^m - y^n = 1$, je manjše od fiksne konstante K.

Ugotovitev H pove, da enačba (3) ne more imeti neskončno naravnih rešitev $m \geq 2$, $n \geq 2$, x, y. Če je poleg $x = n = 3$, $y = m = 2$ še kakšna rešitev, jo je iskati med naravnimi števili pod K, Morebitne rešitve bi se takoj razkrile v seznamu vseh pravih potenc a^b, $a < K$, $b < K$. Tega seznama pa tudi s pomočjo računalnika ni mogoče sestaviti, ker je konstanta K prevelika.

Tako ostaja Catalanova domneva odprta.

Dodatek.

a) Števila $F_n = 2^{2^n}+1$, $n = 0,1,2,3,\dots$ se imenujejo Fermatova. Ker je $F_0 = 2^{2^0}+1 = 3$, F_0 ni prava potenca. Pri $n \geq 1$ je $F_n = (2^{2^{n-1}})^2 + 1$ naslednik kvadrata $(2^{2^{n-1}})^2$ in zato po E ni prava potenca. Sklep: *Fermatovo število nikoli ni prava potenca.*

b) Ker Catalanova domneva ni dokazana, si lahko zastavimo vprašanje: Ali obstajajo tri zaporedna naravna števila, ki so obenem prave potence? Naj bo a naravno število in a, $a+1$, $a+2$ prave potence. Ker med števili do 10 tega ni, vzamemo $a > 10$. Po F je potem

$$a = x^p\,, \quad a+1 = y^q\,, \quad a+2 = z^r \tag{18}$$

in p, q, r so liha praštevila, x, y, z naravna števila. Iz (18) sledi

$$y^q - x^p = 1\,, \qquad z^r - y^q = 1$$

in G pove, da q deli x in z. Zaradi $z^r - x^p = 2$ potem q deli 2. Ne gre, saj je q lih. Zato: *Od treh zaporednih naravnih števil vsaj eno ni prava potenca.*

c) Z naravnim številom $c \geq 3$ opredelimo posplošena Fermatova števila

$$F_{c,n} = c^{c^n} + 1\,, \quad n = 1,2,3,\dots$$

Ali je med temi števili kakšna prava potenca? Če je c potenca števila 2, je zaradi $n \geq 1$ število $F_{c,n}$ Fermatovo in po dodatku a) ni prava potenca. Če c ni potenca števila 2, velja $c = tq$ pri lihem praštevilu q in naravnem številu t. Potem je

$$c^{c^n} = y^q \tag{19}$$

za $y = (tq)^{t^n q^{n-1}}$ in q deli y. Zaradi $c \geq 3$, $n \geq 1$ je $c^{c^n} > 8$. Če je torej $c^{c^n} + 1$ prava potenca, je po F mogoče pisati $c^{c^n} + 1 = x^p$ pri lihem praštevilu p in naravnem x. Iz (19) potem sledi $x^p - y^q = 1$. Po G praštevilo q deli x; ker pa q deli tudi y, bi tako q delil 1. Nemogoče. Torej: *Posplošeno Fermatovo število nikoli ni prava potenca.* (Za $F_{c,0} = c+1$ to ni nujno.)

Jože Grasselli