PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **24** (1996/1997)
Številka 4
Strani 206–209

Ivan Vidav:

O DELJENJU Z OSTANKOM IN ŠE O ČEM

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/24/1301-Vidav.pdf

O DELJENJU Z OSTANKOM IN ŠE O ČEM

V prvih razredih osnovne šole smo se naučili računskih operacij s števili: seštevanja, množenja, odštevanja in deljenja. Ker smo tedaj poznali samo naravna števila $1, 2, 3, \ldots$, zadnji dve operaciji nista bili vselej izvedljivi. Če smo na primer delili kakšno število D z deliteljem d, smo dobili kvocient k in v splošnem še ostanek o. Delitev se je izšla, kadar je bil ostanek o enak nič. Sicer pa je ostanek o vedno manjši od delitelja d. Preizkus smo napravili tako, da smo kvocient k pomnožili z deliteljem d in temu produktu prišteli ostanek o. Pri pravilnem računu smo dobili za rezultat deljenec D, torej

$$D = k \cdot d + o \,. \tag{1}$$

Za ostanek o pa velja ocena

$$0 \leq o < d \,. \tag{2}$$

Pri poljubno izbranih naravnih številih D in d sta celi števili k in o, ki zadoščata enačbi (1) in pogoju (2), natanko določeni. Dobimo ju seveda z deljenjem števila D z d. Ali sme biti D manjši od d? Sme. V tem primeru velja enačba (1) pri $k = 0$ in $o = D$. Ker je zdaj $o = D < d$, je tudi pogoj (2) izpolnjen.

Postopek deljenja naravnih števil z ostankom v matematiki pogosto uporabljamo. Morda je najbolj znan primer uporabe iskanje največjega skupnega delitelja števil D in d, ki ga dobimo s ponavljanjem deljenja z ostankom (Evklidov algoritem). Vendar tu ne bomo govorili o Evklidovem algoritmu, temveč si bomo ogledali neko drugo uporabo.

Vemo, da vsota ne določa sumandov. Če poznamo vsoto $x + y$, števil x in y ne moremo izračunati, tudi tedaj ne, kadar sta x in y naravni števili. (Edina izjema je enačba $x + y = 2$, ki je s pozitivnima celima številoma x in y izpolnjena samo pri $x = y = 1$.) Včasih, kadar je znano več podatkov o sumandih, pa sta x in y določena. Tu bomo obravnavali tale primer: Naj bo

$$x + y = D \,, \tag{3}$$

kjer je D dano število. Denimo, da vemo tole:

1) Sumanda x in y sta naravni števili,
2) x je deljiv z nekim znanim številom d in
3) y je manjši od d, torej $y < d$.

V tem primeru sta sumanda x in y določena. Dobimo ju tako, da delimo D z d. Če je pri tej delitvi kvocient enak k in ostanek o, nam pogled na enačbo (1) pove, da je

$$x = k \cdot d \qquad \text{in} \qquad y = o\,.$$

Kot primer za uporabo tega dejstva si oglejmo, kako izračunamo iz enega samega znanega števila rojstni datum kake osebe. Denimo, da Janez ne ve, kdaj je bil rojen njegov prijatelj Tone. To bi rad dognal na precej neobičajen način: Toneta prosi, naj vzame kos papirja in svinčnik (ali računalnik) in potem napravi tale račun:

"Število, ki pove dan v mesecu tvojega rojstva, pomnoži s 15 in produktu prištej število, ki določa mesec rojstva. Dobljeno vsoto pomnoži z 98 in produktu prištej letnico rojstva."

Tone nekaj časa računa in dobi na koncu rezultat 41946. Zdaj vzame Janez v roke svinčnik in kos papirja, prepiše to število, nekaj časa računa in pove, da je bil Tone rojen 27. marca 1962. Tone potrdi, da je datum pravilen. Kako je Janez dobil iz enega samega znanega števila tri števila, ki določajo datum?

Zaznamujmo z a število, ki pove dan v mesecu, in z b število, ki določa mesec rojstva. Ker je Tone rojen v tem stoletju, saj še ni tako star kakor tista gospa iz Arlesa v južni Franciji, lahko zapišemo njegovo rojstno letnico v obliki $1900 + c$, kjer je c manjši od 98. Račun, ki ga je moral opraviti Tone, se v znakih glasi takole:

$$98(15a + b) + 1900 + c\,.$$

Ta izraz je enak 41946. Janez je najprej odštel 1900 in dobil enačbo

$$98(15a + b) + c = 40046\,.$$

Leva stran je vsota dveh členov. Prvi $98(15a + b)$ je deljiv z 98, drugi c pa je manjši od 98. Janez je delil 40046 z 98 in dobil kvocient $k = 408$ ter ostanek $o = 62$. Ker je očitno kvocient k enak $15a + b$, ostanek o pa enak c, je že našel letnico rojstva, namreč $1900 + c = 1962$. V enačbi

$$15a + b = 408$$

je na levi prvi člen $15a$ deljiv s 15, drugi člen b pa določa mesec rojstva in je zato kvečjemu 12, torej vsekakor $b < 15$. Janez je zdaj delil 408 s 15 in dobil kvocient $k = a = 27$ in ostanek $o = b = 3$. Tako je izračunal, da je bil Tone rojen 27. 3. 1962.

Janez je Tonetu naročil, naj prvič množi s 15, drugič z 98. Očitno bi smel izbrati namesto faktorja 15 katerokoli število, ki je večje od 12, kolikor je mesecev v letu, namesto faktorja 98 pa katerokoli število večje od 97, ker smo zdaj v letu 1997. Najpreprosteje bi bilo, če bi obakrat izbral faktor 100. Bralec naj sam premisli, kakšen bi bil rezultat množenja in seštevanja v tem primeru.

Datum Tonetovega rojstva je skrit v številu 41946. Odkrijemo ga, če poznamo ključ, ki ga v našem primeru določata faktorja 15 in 98. Denimo, da bi Janez čez nekaj časa pozabil, kakšen je drugi faktor, zapomnil pa bi si prvega in imel na listku zapisan rezultat 41946. Rojstnih podatkov ne bi več mogel določiti. Če bi, recimo, domneval, da je bil drugi faktor število 100, bi dobil datum 26. oktober 1946, ki ni pravi. Bralec naj se skuša sam prepričati, da drugi faktor prav gotovo ni 99.

Z isto metodo, kakor tri števila, skrijemo v eno samo število poljubno končno množico naravnih števil. Tako bi lahko Janez izračunal poleg datuma rojstva tudi hišno številko Tonetovega stanovanja.

Pa naj bo

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{4}$$

poljubno končno zaporedje naravnih števil. Izberimo faktorje $d_2, d_3, \ldots, d_n$, tako da veljajo ocene

$$d_2 > a_2, \quad d_3 > a_3, \ \ldots, \ d_n > a_n \, .$$

($d_2, \ldots, d_n$ so naravna števila.) Tvorimo zdaj zaporedje

$$k_2, k_3, \ldots, k_n$$

po temle predpisu: Najprej naj bo $k_2 = a_1 d_2 + a_2$, nato $k_3 = k_2 d_3 + a_3$, $\ldots$, splošno

$$k_i = k_{i-1} d_i + a_i \quad \text{za } i = 3, 4, \ldots, n \, . \tag{5}$$

V zadnjem členu k_n, imenujmo ga D, je skrito zaporedje (4). Če poznamo število D in faktorje $d_2, \ldots, d_n$, lahko vse člene a_i izračunamo. Najprej delimo D z d_n. Pogled na enačbo (5), ki jo zapišemo za $i = n$, pove, da je kvocient pri tej delitvi enak k_{n-1}, ostanek pa zadnji člen a_n zaporedja (4). Če kvocient k_{n-1} delimo z d_{n-1}, je novi kvocient enak k_{n-2}, ostanek pa člen a_{n-1}. Tako nadaljujemo in dobimo vsa števila (4). Hkrati vidimo, da število D določa tudi vrstni red členov zaporedja (4).

Zgled. Denimo, da je Tonetova hišna številka 48. Hišna številka in rojstni podatki sestavljajo štiri števila

$$48, \ 27, \ 3, \ 62 \, .$$

Ker imajo nekateri meseci 31 dni, mora Janez za d_2 izbrati večje število, npr. $d_2 = 35$. Faktorja d_3 in d_4 pa naj bosta kakor prej 15 in 98. Tone, ki mu zdaj pride prav računalnik, izračuna, da je $D = 2509646$. Janez deli to število z 98 in dobi kvocient 25608 in ostanek 62. Nato deli kvocient 25608 s 15. Novi kvocient je zdaj 1707, ostanek pa 3. Nazadnje deli 1707 s 35 in dobi ostanek 27 ter kvocient 48. Tako najde vsa štiri števila, ki določajo hišno številko in datum rojstva prijatelja Toneta.

Ivan Vidav

KOMUTATIVNOST MNOŽENJA – Rešitev s str. 157

Iščemo štiri desetiške števke a, b, c, d, ki izpolnjujejo pogoj

$$\overline{ab} \times \overline{ba} = \overline{cdc},$$

od katerih je le d lahko enaka 0.

- Zaradi simetrije zadošča poiskati števila $\overline{ab}$, za katera je $a \leq b$. Ker je $\overline{ab} \times \overline{ba}$ trimestno število, mora biti $a \times b < 10$. Torej lahko nastopijo kvečjemu naslednji primeri:

$$a = 1 \text{ in } 1 \leq b \leq 9,$$
$$a = 2 \text{ in } 2 \leq b \leq 4,$$
$$a = 3 \text{ in } b = 3.$$

- Iz

$$(10a + b)(10b + a) = 100c + 10d + c$$

sledi

$$10(a^2 + b^2 - d) = 101(c - ab).$$

To pomeni, da je $a^2 + b^2 - d$ deljivo s 101, zaradi zgornjih ocen pa velja še

$$-7 \leq a^2 + b^2 - d \leq 82.$$

Torej je $a^2 + b^2 - d = 0$.

- Ker je d desetiška števka, sledi od tod ocena $a^2 + b^2 = d \leq 9$, kar pomeni, da za neničelna a in b ostanejo le še možnosti:

$$a = 1,\ b = 1; \quad a = 1,\ b = 2; \quad a = 2,\ b = 2.$$

Ker je $11 \cdot 11 = 121$, $12 \cdot 21 = 252$ in $22 \cdot 22 = 484$, ima naša naloga štiri rešitve. To so števila 11, 12, 22 in zaradi simetrije še 21.

Marija Vencelj