PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **24** (1996/1997)
Številka 4
Strani 226–229

Silva Kmetič:

METODA PLOŠČINE

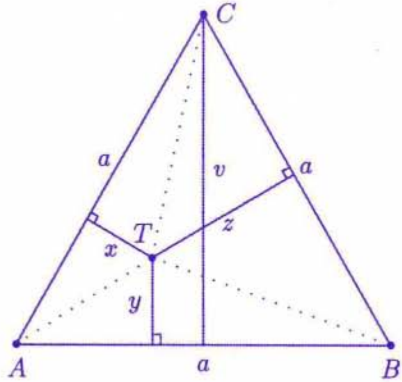
Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/24/1301-Kmetic.pdf

METODA PLOŠČINE

Na zadnjem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje so učenci sedmih razredov reševali naslednjo nalogo.

V notranjosti enakostraničnega trikotnika ABC s stranico a leži točka T. Brez merjenja pokaži, da je vsota razdalj točke T do vseh stranic enaka višini tega trikotnika, ne glede na to, kje v notranjosti si izbereš točko (slika 1).



Slika 1.

Rešitev bo sicer objavljena v poročilu s tekmovanja, a si jo vseeno oglejmo. Ker je točka T v notranjosti trikotnika, lahko trikotnik razdelimo na tri manjše trikotnike, kot kaže slika. Z nje razberemo, da lahko zapišemo dvojno ploščino trikotnika na dva načina:

$$a \cdot x + a \cdot y + a \cdot z = a \cdot v\,.$$

Če na levi strani izpostavimo faktor a in nato z njim delimo (smemo, saj $a \neq 0$), sledi $x + y + z = v$.

Vidimo, da je vsota razdalj x, y, z vedno enaka višini enakostraničnega trikotnika, ne glede na to, kje smo točko izbrali.

Pravimo, da smo pri reševanju naloge uporabili metodo ploščine. Naloga ne sprašuje po ploščini trikotnika, vendar smo z uporabo ploščine dokazali zvezo med razdaljami točke T do stranic in višino tega trikotnika. Kadar uporabimo pojem ploščine pri reševanju problema kot sredstvo, s pomočjo katerega dokažemo odnose ali pa jih poiščemo, govorimo o *ploščini kot metodi*. Okvirna ideja metode je naslednja: običajno izrazimo ploščino na dva različna načina, tako dobljena enakost pa nas vodi do nečesa novega.

Naloge, ki jih lahko rešimo z metodo ploščine, kažejo nekatere značilnosti. Poskusimo jih razbrati iz naslednjih primerov:

1. V pravokotnem trikotniku s katetama, dolgima 30 cm in 40 cm, obstaja notranja točka T, ki je od vsake katete oddaljena 5 cm. Koliko je ta točka oddaljena od hipotenuze?

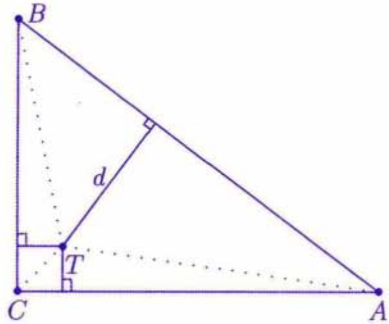
Sklepamo kot v prvi nalogi in ploščino trikotnika izrazimo na dva načina:

$$2S = 30 \cdot 40 = 30 \cdot 5 + 40 \cdot 5 + 50 \cdot d,$$

kjer je d oddaljenost točke T od hipotenuze (slika 2).

Iz dobljene enačbe izračunamo razdaljo $d = 17$ cm.

Nalogo lahko rešimo tudi drugače. Ena od možnosti je večkratna uporaba Pitagorovega izreka. Postopek reševanja je daljši in bolj zapleten. Poskusite!

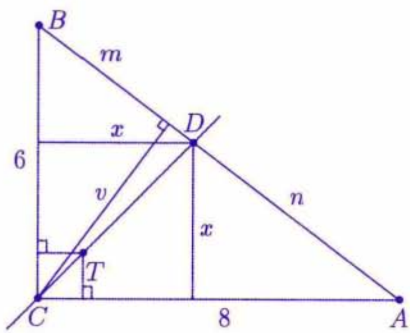


Slika 2.

2. V pravokotnem trikotniku s katetama, dolgima 6 cm in 8 cm, obstaja notranja točka T, ki je od vsake katete oddaljena 1 cm. Skozi oglišče C in točko T narišemo premico. V kakšnem razmerju ta premica deli hipotenuzo?

Izberimo oznake kot na sliki 3. Trikotniki ABC, BCD in ACD imajo zapored enake višine na stranice AB, BD in AD. Ploščini trikotnikov BCD in ACD izračunamo na dva načina.

Za trikotnik BCD velja: $6 \cdot x = m \cdot v$ in podobno za trikotnik ACD: $8 \cdot x = n \cdot v$. Od tod sledi enačba $\frac{m \cdot v}{n \cdot v} = \frac{6 \cdot x}{8 \cdot x}$. Po krajšanju dobimo $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$. Ker smo spraševali po razmerju, ni bilo treba izračunati dolžin v in x.



Slika 3.

Iz podatkov razberemo, da je naša premica simetrala pravega kota, iz rezultata naloge pa, da je razmerje odsekov na hipotenuzi enako razmerju katet. Zastavimo si nekaj vprašanj.

- Razmerje odsekov na hipotenuzi je enako razmerju katet. Ali je to naključje?
- Ali lastnost, da kotna simetrala deli nasprotno stranico v razmerju priležnih stranic, velja samo za simetralo pravega kota?
- Ali velja tudi za druge kote v pravokotnem trikotniku?

- Ali simetrala notranjega kota trikotnika deli nasprotno stranico v razmerju priležnih stranic v vsakem trikotniku?
- Poskusite poiskati posamezne primere, za katere je domneva resnična.

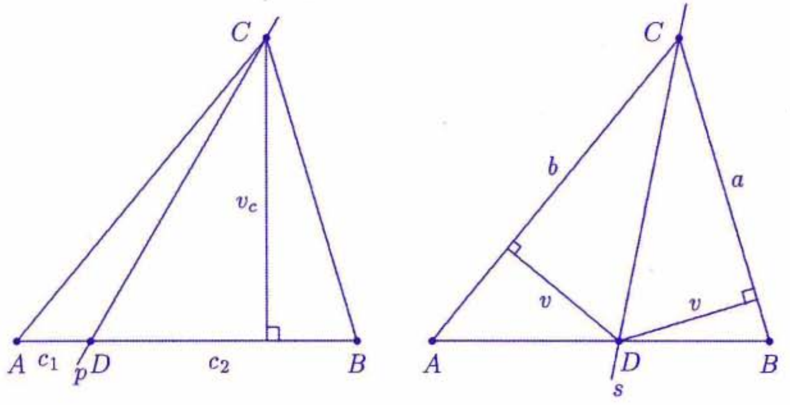
Posamezni primeri nas pripeljejo do splošnejše domneve, da velja lastnost v poljubnem trikotniku. Njeno pravilnost bomo dokazali z metodo ploščine.

Izrek o simetrali notranjega kota trikotnika pravi: Simetrala notranjega kota trikotnika deli nasprotno stranico v razmerju priležnih stranic.

Izrek lahko elegantno dokažemo, če predhodno dokažemo naslednjo pomožno trditev:

3. Naj bo p poljubna premica, ki poteka skozi oglišče C trikotnika ABC in razdeli ta trikotnik na dva trikotnika ADC in BCD. Potem sta ploščini trikotnikov ADC in BCD v razmerju njunih osnovnic AD in BD.

Trikotnika ADC in BCD (slika 4a) imata skupno višino v_c na osnovnici c_1 oziroma c_2. Zato je $2S_1 = c_1 \cdot v_c$ in $2S_2 = c_2 \cdot v_c$. Od tod že sledi naša trditev: $S_1 : S_2 = c_1 : c_2$.



(a) (b)

Slika 4.

Dokaz izreka o simetrali kota:

Naj bo sedaj premica s simetrala kota pri C (slika 4b). Torej sta razdalji točke D od stranic a in b med seboj enaki, npr. v. Potem lahko zapišemo ploščini S_1 in S_2 še drugače: $2S_1 = b \cdot v$ in $2S_2 = a \cdot v$. Od tod sledi najprej $S_1 : S_2 = b : a$ in nato iz pomožne trditve $c_1 : c_2 = b : a$.

In kdaj naj pri reševanju pomislimo na metodo ploščine?

To storimo vedno, kadar se v nalogi pojavi pravokotnost. Ta pa je povezana s pojmi višina, oddaljenost, polmer.

Sicer pa – vaja dela mojstra!

Primeri podobnih nalog:

4. Naj bo AB osnovnica enakokrakega trikotnika ABC. Dokaži, da je za vse točke $T \in AB$ vsota razdalj točke T od krakov trikotnika ista.
5. Trikotniku je včrtana krožnica s polmerom 4 cm. Eno od stranic trikotnika razdeli dotikališče včrtane krožnice na dela, ki sta dolga 6 cm in 8 cm. Izračunaj dolžini preostalih stranic (Heronova formula).
6. Naj bo S notranja točka trikotnika ABC, katere oddaljenosti od stranic trikotnika so a_1, b_1, c_1. Dokaži, da je:

$$\frac{a_1}{v_a} + \frac{b_1}{v_b} + \frac{c_1}{v_c} = 1,$$

kjer so v_a, v_b, v_c višine trikotnika.
7. Če so v_a, v_b, v_c višine poljubnnega trikotnika in r polmer trikotniku včrtane krožnice, velja:

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{r}.$$

Dokaži!
8. Dolžine stranic trikotnika so obratno sorazmerne pripadajočim dolžinam višin. Dokaži!
9. Poišči točko v notranjosti trikotnika z lastnostjo, da je produkt oddaljenosti te točke od stranic trikotnika največji.

Silva Kmetič

SESTAVLJANJE ŠTEVIL – Rešitev s str. 199

S štirimi štiricami lahko števila 13, 19, 33 in 85 zapišemo takole:

$$13 = 4! - 44/4$$
$$19 = 4! - 4 - 4/4$$
$$33 = 4! + (4 - .4)/.4$$
$$85 = 4! + (4! + .4)/.4$$

Martin Juvan