PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **24** (1996/1997)
Številka 3
Strani 150–152

Martin Juvan:

POSPLOŠENA FIBONACCIJEVA ZAPOREDJA

Ključne besede: matematika, zaporedja, rekurzivne definicije, računalništvo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/24/1298-Juvan.pdf

POSPLOŠENA FIBONACCIJEVA ZAPOREDJA

Gotovo poznate Fibonaccijevo zaporedje. Njegovi začetni členi so 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … Pravijo, da je nanj prvi naletel Leonardo (Fibonacci) iz Pise (1180?–1250), ko je opazoval spreminjanje števila zajcev. Naj bo dovolj govoric. Bolj natančno to zaporedje opišemo takole. Začetna člena f_1 in f_2 sta enaka ena: $f_1 = 1$ in $f_2 = 1$; n-ti člen zaporedja f_n, kjer je $n > 2$, pa je enak vsoti dveh prejšnjih členov: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Definiciji, kakršna je pravkar opisana, pravimo *rekurzivna*. Pri njej naslednji člen izračunamo iz nekaj prejšnjih.

Če ohranimo rekurzivno zvezo, začetna člena pa poljubno spremenimo, dobimo *posplošeno Fibonaccijevo zaporedje*. Za začetna člena a_1 in a_2 torej vzamemo poljubni števili a in b: $a_1 = a$ in $a_2 = b$; naslednji členi zaporedja a_n pa so kot prej enaki vsoti dveh prejšnjih členov: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Za $a = 1$ in $b = 4$ tako dobimo zaporedje z začetnimi členi 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, …

Zapišimo prvih nekaj členov posplošenega Fibonaccijevega zaporedja: a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$, $3a+5b$, $5a+8b$, $8a+13b$, … Hitro opazimo, da so koeficienti pred začetnima členoma a in b ravno členi običajnega Fibonaccijevega zaporedja. To seveda ni naključje. Z matematično indukcijo lahko dokažemo, da za $n \geq 3$ velja

$$a_n = f_{n-2} \cdot a + f_{n-1} \cdot b\,.$$

Sedaj pa je že čas, da si zastavimo nekaj vprašanj. Pred časom je gospod Kukrika v prilogi Programer revije Monitor spraševal po tistih posplošenih Fibonaccijevih zaporedjih s pozitivnima začetnima členoma $a, b > 0$, ki vsebujejo število 1000000 in imajo pri tem čim manjšo vsoto $a + b$ obeh začetnih členov.

Oglejmo si nalogo nekoliko natančneje. Naprej bomo pokazali, da naloga v zgornji obliki pravzaprav nima prave rešitve, saj lahko poiščemo posplošena Fibonaccijeva zaporedja, ki vsebujejo število 1000000, pri katerih je vsota $a + b$ poljubno majhna. Takole sklepamo. Če naj število 1000000 nastopi v zaporedju, mora za neko naravno število n veljati

$$1000000 = a_n = f_{n-2} \cdot a + f_{n-1} \cdot b\,.$$

Zaradi lažjega računanja vzemimo $a = b$. Potem je

$$1000000 = f_{n-2} \cdot a + f_{n-1} \cdot a = f_n \cdot a\,.$$

Začetna člena $a = b = \frac{1000000}{f_n}$ torej rešita nalogo. Ker pa Fibonaccijeva števila postanejo z rastočim n poljubno velika, lahko naredimo vsoto $a+b$ poljubno majhno.

Pogoje v nalogi moramo torej nekoliko zaostriti. Zahtevajmo še, da sta začetna člena a in b naravni števili. Naloga ima potem gotovo rešitev, saj so možne vrednosti za a in b le števila med 1 in 999999. Pregledati moramo torej le končno mnogo možnosti. Ker pa je teh možnosti vendarle kar precej, preproste analitične rešitve pa ni pri roki, si bomo pri reševanju pomagali z računalnikom. Najprej opazimo, da iz dveh zaporednih členov zaporedja lahko izračunamo vse prejšnje člene. Če torej izberemo število, ki je v iskanem zaporedju pred številom 1000000, v programu ga bomo hranili v spremenljivki `prej`, lahko iz njega izračunamo a in b. Ker so kandidati le števila od 1 do 999999, teh pa ni preveč, jih preizkusimo s spodnjim programom. Pri tem člene zaporedja hranimo v spremenljivkah tipa `longint`, saj imajo običajna cela števila premajhen obseg.

```
program posploseni_Fibonacci;
{ Z vzvratnim računanjem poišče začetna člena posplošenega }
{ Fibonaccijevega zaporedja. }
const
  elt = 1000000;                                  { dani člen zaporedja }
var
  prej: longint;                  { člen, ki je v zaporedju pred členom elt }
  a1,a2,a3: longint;                           { členi zaporedja: a3=a2+a1 }
  min,amin,bmin,pmin: longint;                 { (trenutno) najboljša rešitev }
begin
  min := elt+1;                              { trenutno najmanjša vsota a+b }
  for prej:=elt−1 downto 1 do begin
    a3 := elt; a2 := prej; a1 := a3−a2;    { izračun začetnih členov zaporedja }
    while a1>0 do begin
      a3 := a2; a2 := a1; a1 := a3−a2;
    end; { while }
    if a2+a3<min then begin                          { nova najboljša rešitev }
      min := a2+a3; amin := a2; bmin := a3; pmin := prej;
    end;
  end; { for }
  writeln('Vsota: ',min:8,' a = ',amin,' b = ',bmin,' (predzadnji clen ',pmin,')');
  readln;
end.
```

Kot rešitev v nekaj sekundah dobimo števili $a = 154$ in $b = 144$ z vsoto 298. Pri teh začetnih členih ima zaporedje naslednje elemente:

154, 144, 298, 442, 740, 1182, 1922, 3104, 5026, 8130, 13156, 21286, 34442, 55728, 90170, 145898, 236068, 381966, 618034, 1000000, ...

Tako, nalogo smo uspešno rešili. Kot neobvezno domačo nalogo pa lahko poskušate ugnati še naslednja problema.

1. Poišči tisti posplošeni Fibonaccijevi zaporedji z nenegativnima začetnima členoma $a, b \geq 0$, ki kot 13. člen vsebujeta število 1996, za kateri je vsota $a + b$
   a) najmanjša,
   b) največja.
   Naj opozorim, da vam pri tej nalogi računalnik ne bo veliko pomagal.
2. Ta naloga je bolj računalniška. Če razumete gornji program, potem vam ga ne bo težko spremeniti tako, da bo rešil v prispevku obravnavano nalogo za število 1996 namesto za število 1000000. Če pa se vam zdi to prelahko, potem lahko poskusite nalogo rešiti še za število 19961996.

Martin Juvan

DEDIŠČINA

Premožen mož je svojim številnim otrokom zapustil precejšnje premoženje v zlatnikih. V oporoki je določil, naj najstarejši vzame 100 zlatnikov in desetino ostanka, drugi naj vzame 200 zlatnikov in desetino novega ostanka, tretji 300 zlatnikov in še desetino novega ostanka, četrti 400 zlatnikov in spet desetino nastalega ostanka, itd. Izkazalo se je, da so si otroci na ta način razdelili vse zlatnike in to na enake dele.

a) Kolikšno premoženje in koliko otrok je mož zapustil?

To nalogo je že pred več kot 200 leti zastavil veliki švicarski matematik Leonhard Euler. Poleg rešitve te naloge poiščite še odgovora na naslednji vprašanji:

b) Kolikšno je premoženje in koliko je otrok, če vzame k–ti otrok ka enot premoženja in $\frac{1}{n}$–ti del vsakokratnega ostanka, ter se tudi ta delitev izide na enake deleže. Pri tem je $a > 0$ in $n \in \mathbb{N}$.

c) Denimo, da bi radi na podoben način, kot je opisan v zgornjem primeru, razdelili bonbone med m otrok. Kolikšna je najmanjša količina bonbonov, ki jo za to potrebujete. Kako boste izbrali vrednosti za a in za n?

Marija Vencelj