

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 24 (1996/1997)

Številka 2

Strani 70-72

Janez Strnad:

## ARISTOTEL IN ARHIMED O VZVODU

Ključne besede: fizika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/24/1295-Strnad.pdf>

© 1996 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## ARISTOTEL IN ARHIMED O VZVODU

Od vej fizike se je mehanika začela razvijati že v antičnih časih. Pri tem so *statika*, *kinematika* in *dinamika* šle po različnih poteh. V prvi, ki obravnava mirujoča telesa, so bila nekatera vprašanja dovolj preprosta, da so jih rešili s *sorazmerjem*. Sorazmerje je bilo tedaj edino izdelano matematično orodje. Druga, ki raziskuje gibanje teles, je s sorazmerjem lahko zajela le premo enakomerno gibanje. Tretjo, ki si prizadeva podrobno pojasniti gibanje teles, so tedaj šteli v filozofijo, kar namiguje na to, da je bila za fiziko še prezahtevna.

Eno izmed prvih spoznanj v statiki je bil *izrek o vzvodu*, s katerim so obvladali ravnovesje bremen na ravnem vzvodu. V ravnovesju sta ročici, to sta razdalji pritrdišč od osi, v obratnem razmerju bremen:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (1)$$

Do spoznanja so najbrž prišli najprej s preprostim poskušanjem. Spoznaje je omogočalo tehtanje, uporabno v vsakdanjem življenju.

Zanimivo je, kako je izrek utemeljil Aristotel (384 do 322 pr.n.š.). Najprej je ugotovil, da bi se pri vrtenju vzvoda okoli osi gibali krajišči vzvoda s hitrostma, ki sta sorazmerni z ročicama:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2)$$

(Danes bi rekli, da je vzvod tog in se okoli osi zavrti z določeno kotno hitrostjo.) Nato se je oprl na svoj "zakon gibanja", po katerem je hitrost telesa tem večja, čim manjši je upor. Mislil je, da je pri gibanju vzvoda treba breme na nasprotnem krajišču upoštevati kot upor. Zato naj bi hitrost drugega krajišča bila obratno sorazmerna z bremenom v prvem krajišču in hitrost prvega krajišča obratno sorazmerna z bremenom v drugem krajišču:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (3)$$

Iz enačb (2) in (3) sledi izrek o vzvodu (1). To ni bilo zadnjič, da je v fiziki kriva pot pripeljala do pravega sklepa.

Arhimed (287 do 212 pr.n.š.) se je zadeve že lotil drugače. Za razliko od Aristotela se je ukvarjal z matematiko. Njegovo osnovno stališče je mogoče razbrati iz pisma:

“Arhimed Eratostenu pozdrav:

določene stvari so mi najprej postale jasne na mehanični način, čeprav sem jih moral pozneje dokazati geometrijsko, ker raziskovanje na povedani način ni dalo pravega dokaza. Seveda pa je lažje priti do dokaza, če smo prej s tem načinom dobili nekaj znanja o vprašanih, kot bi bilo brez prejšnjega znanja.”

Geometrijsko dokazovanje v Evklidovem duhu se fiziku danes zdi dokaj zapleteno. Nasprotno pa se mu zdi to, kar je imenoval mehanični način, zanimivo in poučno. Poskusimo mu slediti.

Zelo lahek vzvod je v ravnovesju, če sta bremeni enaki in ročici enaki. Razmere so simetrične in obe strani vzvoda enakovredni, tako da ni razloga, da bi se vzvod nagnil na eno stran ali na drugo.

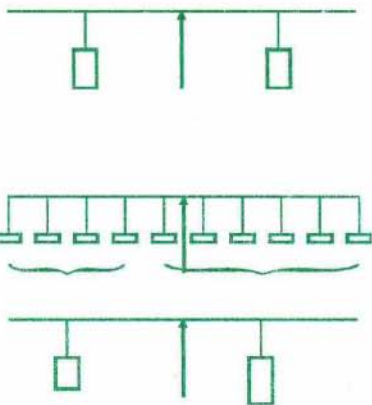
To velja tudi, če bremeni razdelimo na več enakih uteži in jih v enakih razmikih razporedimo po vzvodu. Razdelimo ju na 10 uteži.

Združimo nekaj uteži na eni strani v njihovem težišču in preostale uteži na drugi strani v njihovem težišču. S tem prvi korak naredimo v nasprotni smeri. Zdaj razmere, gledano v

celoti, niso več simetrične. Toda težišče prve skupine uteži še vedno leži simetrično glede na to skupino in težišče druge skupine glede na to skupino. Združimo na levi 4 uteži in in na desni preostalih 6.

Težišče leve skupine je v razdalji 3 Pp od osi in težišče desne skupine 2 Pp od osi, če je 1 Pp ali 1 Presekov palec razdalja med sosednjima bremenoma. Za izbrani primer sta ročici v razmerju  $3 : 2 = 6 : 4$ , kar je enako obratni vrednosti razmerja uteži  $4 : 6$ .

Za bralce, ki jih zgled ni prepričal, ponovimo računanje splošno. Razdelimo bremeni na skupno  $N$  uteži. Zelo lahek vzvod razdelimo potem na  $N - 1$  enakih delov, od katerih meri vsak 1 Pp. Združimo na levi strani  $n$  uteži in na desni jih preostane  $N - n$ . Na levo skupino odpade del vzvoda  $(n - 1)$  Pp, na desno pa del  $(N - n - 1)$  Pp. Zaradi simetrije skupin je težišče prve skupine  $\frac{1}{2}(n - 1)$  Pp od levega krajišča vzvoda in težišče desne  $\frac{1}{2}(N - n - 1)$  Pp od desnega krajišča. Od osi na sredini vzvoda je levo težišče oddaljeno  $\frac{1}{2}(N - 1) - \frac{1}{2}(n - 1)$  Pp =  $\frac{1}{2}(N - n)$  Pp, desno pa  $\frac{1}{2}(N - 1) - \frac{1}{2}(N - n - 1)$  Pp =  $\frac{1}{2}n$  Pp. Ročici bremen sta torej v razmerju  $(N - n)/n$ , ko sta bremeni v razmerju  $n/(N - n)$ . To potrjuje izrek (3).



Arhimed je lahko vzkliknil:

“Dajte mi trdno točko in premaknil bom Zemljo!”,

ko se je splošno prepričal, da velja izrek o vzvodu. Poročajo, da je presenetil meščane Sirakuz, ko je dal z vzvodi dvigniti in prestaviti ladjo. Nihče ni mislil, da je kaj takega mogoče.

Upajmo, da se je zdel bralcem Preseka pogled v daljno preteklost fizike zanimiv. Vendar pri takem površnem presojanju nekdanjih razmer z današnjimi očmi lahko hitro prenačljeno sklepamo. Pri podrobnejšem razmisleku bi kazalo upoštevati, da tedaj količin niso vpeljali tako kot mi, jih niso zaznamovali z algebrskimi simboli in niso pisali enačb.

Arhimed je vedel, da je treba podpreti vzvod v osi s “silo”, ki ustreza vsoti bremen. To je lahko ugotovil, če je vzvod obesil na škripec in ga uravnovesil. Znal je določiti tudi težišče nesimetričnih likov. Vendar zakona gibanja ni poznal. Z dinamiko je začel Galileo Galilei na začetku 17. stoletja, ko je raziskal enakomerno pospešeno gibanje pri kotaljenju kroglice po blagem klancu in sklepe razširil na prosto padanje, Zakon gibanja je postavil leta 1687 Isaac Newton. Vpeljal je pojem sile kot mero za delovanje telesa na telo (zato smo govorili o “bremenu”, a ne o “teži” ali “sili”). Odtlej je pojasnjevala dinamika gibanje teles z delovanjem drugih teles in je postala teža sila, s katero Zemlja privlači telo. Aristotel je s svojim “zakonom gibanja” poskusil opisati voz, ki ga po ravnih tleh vleče konj. Ta “zakon” je mejni primer Newtonovega zakona gibanja za telo, na katero deluje s hitrostjo sorazmerni upor.

Iz Newtonovega zakona izpeljemo izrek o vzvodu preko ravnovesja navorov:  $r_1 F_1 = r_2 F_2$ . Arhimed se je oprl na simetrijo, ko še ni poznal zakona gibanja. Podobno si današnji fiziki s simetrijo pomagajo na primer pri raziskovanju osnovnih delcev, ko še ne poznajo zakona gibanja.

Janez Strnad

## ALI JE VSOTA KVADRATOV SAMIH NENIČELNIH ŠTEVIL LAHKO ENAKA NIČ? – Rešitev s str. 13

Naj bodo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  poljubna realna števila, ki zadoščajo pogoju  $ab + bc + ca = 0$ . Tedaj je

$$(a+bi)^2 + (b+ci)^2 + (c+ai)^2 = a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + 2i(ab+bc+ca) = 0.$$

Primer: Za  $a = 2$ ,  $b = 2$  in  $c = -\frac{ab}{a+b} = -1$  dobimo:

$$(2 + 2i)^2 + (2 - i)^2 + (-1 + 2i)^2 = 0.$$

Jurij Kovič