

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 24 (1996/1997)

Številka 2

Strani 74-77

Nada Razpet:

VIŠINSKA TOČKA TRIKOTNIKA IN STOŽNICE

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/24/1295-Razpet.pdf>

© 1996 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

VIŠINSKA TOČKA TRIKOTNIKA IN STOŽNICE

Že v starih časih so nekateri ljudje poznali in znali izkoristiti gibanje posameznih točk pri raznih napravah, na primer vodnih črpalkah, parnih strojih, urah itd. Takšna opazovanja so lahko zanimiva še danes. Zanimivo je vedeti, kakšno krivuljo opisuje na primer ventil ali določena točka na obodu kolesa, ko se brez drsenja peljemo po vodoravni cesti. Te krivulje zlahka tudi narišemo; zadostujeta svinčnik in papir. Svinčnik prilepimo na obod krožne plošče, ki jo kotalimo ob ravnilu, in krivulja se zariše na papirju. Nekateri računalniški programi omogočajo opazovanje različnih gibanj. Eden izmed njih je Cabri-géomètre, ki so ga izdelali na univerzi v Grenoblu v Franciji in ga že imajo tudi pri nas na nekaterih šolah. Tudi novi žepni računalnik TI92 ga že ima vgrajenega v svoji spominski enoti (poleg njega pa še program DERIVE, o katerem je bilo v Preseku že nekaj napisano).

S programom Cabri-géomètre bomo odgovorili na naslednje zanimivo geometrijsko vprašanje:

Kakšno krivuljo opiše višinska točka V trikotnika $\triangle ABC$ z negibno stranico AB , ko oglišče C premikamo po izbrani premici p ?

Če imamo na voljo omenjeni program, potem najprej narišemo poljuben trikotnik $\triangle ABC$ in poljubno premico p . V trikotniku $\triangle ABC$ konstruiramo višinsko točko V . Dogovorimo se, da bo imela stranica AB konstantno dolžino in bo negibna (ne bomo je premikali). Program omogoča, da oglišče C pripeljemo na premico p in ga nanjo nekako prilepimo, kar pomeni, da se nato točka C lahko premika le po premici p . Opazujemo, kako se pri tem giblje točka V . Izkaže se, da je oblika krivulje odvisna od lege premice. Ločimo tri bistveno različne primere: ko je premica p vzporedna stranici AB , ko je na stranico AB pravokotna in ko jo seka (ali pa njeno nosilko) pod kotom, ki ni enak 90° .

Premica p je vzporedna stranici AB

Če premikamo oglišče C po premici p , ki je vzporedna stranici AB , se višinska točka V giblje po krivulji, za katero bi z risbe, narisane s programom Cabri-géomètre, lahko sklepali, da je parabola, ki poteka skozi oglišči A in B . Preverimo našo domnevo z računom.

Najprej si izberimo pravokotni koordinatni sistem. Koordinatno izhodišče postavimo v oglišče A , os x naj bo nosilka stranice AB . Oglišče C naj leži na premici p , ki je za $|d| > 0$ oddaljena od osi x . Naš trikotnik ima torej oglišča $A(0, 0)$, $B(b, 0)$ in $C(t, d)$. Pri tem je b realna konstanta in t parameter, ki se spreminja, če spreminjamo lego točke C . Premica p ima enačbo $y = d$.

Poiščimo koordinate točke V , ki je presečišče nosilke višine na stranico AB in nosilke višine na stranico CB . Prva je premica $x = t$, druga pa je premica, ki gre skozi koordinatno izhodišče in je pravokotna na stranico CB . Zato je njena enačba

$$y = \frac{b-t}{d}x.$$

Sledi, da ima trikotnik ABC višinsko točko $V(t, \frac{1}{d}t(b-t))$. Ko se točka C giblje po premici p , višinska točka V potuje po krivulji z enačbo

$$y = \frac{1}{d}x(b-x).$$

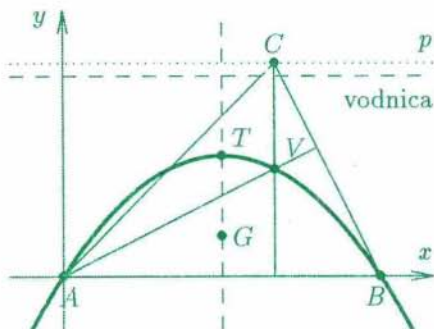
Enačbo prepisemo v obliko

$$d(y - \frac{b^2}{4d}) = -(x - \frac{b}{2})^2, \quad (1)$$

iz katere razberemo, da je krivulja parabola s temenom v točki $T(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4d})$. Parabola seka os x v točkah z abscisama $x_1 = 0$ in $x_2 = b$, torej v točkah A in B .

Kot je znano iz analitične geometrije, pomeni absolutna vrednost koeficienta d v enačbi (1) 4-kratno goriščno razdaljo parabole. Vemo tudi, da teme leži na sredini med premico vodnica in goriščem. Preprost račun pokaže, da je gorišče parabole v točki $G(\frac{b}{2}, \frac{b^2-d^2}{4d})$, vodnica pa ima enačbo $y = \frac{b^2+d^2}{4d}$.

Dokler sta notranja kota $\sphericalangle CAB$ in $\sphericalangle ABC$ oba ostra, opisuje višinska točka del parabole, ki je nad osnovnico, sicer pa preostali del parabole (slika 1).

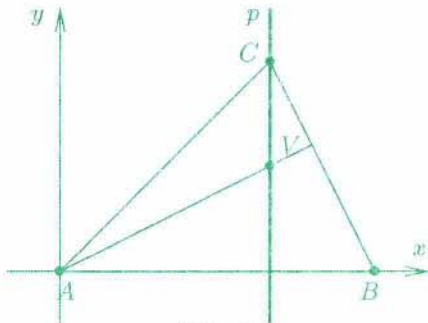


Slika 1.

Premica p je pravokotna na stranico AB

V tem primeru je premica p nosilka ene od višin. Če premikamo oglišče C po p , se po njej giblje tudi točka V (slika 2).

Poseben primer dobimo, če gre premica p skozi oglišče A (ali pa B). V teh dveh primerih je trikotnik $\triangle ABC$ ves čas pravokoten (s pravim kotom v A oziroma v B) in točka V se ne giblje, ostane kar v A oziroma v B .



Slika 2.

Premica p seka nosilko stranice AB pod kotom $\alpha \neq 90^\circ$

Vzemimo, da ima premica p , po kateri potuje točka C , enačbo $\alpha x + \beta y - \delta = 0$, pri čemer sta koeficienta α in β oba različna od nič. (Primeri, ko je bodisi $\alpha = 0$ ali $\beta = 0$, smo že obravnavali. Če sta oba koeficienta hkrati nič, to ni enačba premice.)

Če izberemo koordinatni sistem tako kot v prvem primeru, ima oglišče C koordinati t in $y = (\delta - \alpha t)/\beta$. Višinska točka V leži na premicah z enačbama

$$x = t \quad \text{in} \quad y = \frac{\beta(b-t)}{\delta - \alpha t} x.$$

Od tod sledi:

Ko se točka C giblje po premici p , točka V opisuje krivuljo z enačbo

$$y = \frac{\beta x(b-x)}{\delta - \alpha x} \quad (2)$$

oziroma

$$\beta x^2 - \alpha x y - \beta b x + \delta y = 0. \quad (3)$$

Enačba (3) pove, da je iskana krivulja stožnica. Iz enačbe (2) razberemo, da ima krivulja navpično asimptoto

$$x = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Če enačbo (2) zapišemo v obliki

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\beta\delta - \alpha\beta b}{\alpha^2} + \frac{\alpha\beta\delta b - \beta\delta^2}{\alpha^2(\delta - \alpha x)},$$

vidimo, da ima krivulja še eno asimptoto z enačbo

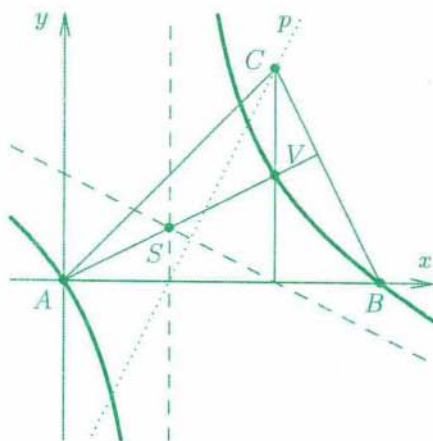
$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\beta\delta - \alpha\beta b}{\alpha^2}.$$

Če $\delta \neq 0$ in $\alpha b \neq \delta$, je iskana krivulja hiperbola. Ena asimptota je pravokotna na nosilko stranice AB , druga pa na premico p . Središče hiperbole je točka $S(\frac{\delta}{\alpha}, \frac{2\beta\delta - \beta\alpha b}{\alpha^2})$, ki je presečišče obeh asimptot (glej sliko 3).

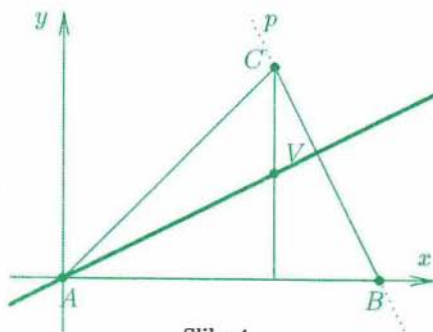
Če je $\delta = 0$, je premica p nosilka stranice AC , če pa je $\alpha b = \delta$, pa nosilka stranice BC . Točka V se tedaj giblje po premici, ki je pravokotna na premico p , to je po nosilki višine. Pri tem seveda ne smemo pozabiti, da je v primeru, ko pade C v oglišče B oziroma v A , trikotnik izrojen in o višinski točki V ne moremo govoriti (glej sliko 4).

Posebej zanimive so lahko tudi krivulje, ki jih opisuje višinska točka V , ko oglišče C premikamo po drugačnih krivuljah. Vendar je tedaj analiza naloge težja.

Nada Razpet



Slika 3.



Slika 4.

SKRIT RAČUN – Rešitev s str. 53

Naloga ima eno samo rešitev

$$\frac{3}{6} - \frac{927}{1854} = 0.$$

Marija Vencelj