GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

Letos je ena najpomembnejših matematičnih obletnic nedvomno 350-letnica rojstva nemškega filozofa in matematika Gottfrieda Wilhelma Leibniza. Bil je eden izmed najodličnejših umov vseh časov, njegovo delo pa je zaznamovalo marsikatero področje znanosti. V sestavku se bomo omejili predvsem na njegovo matematično delo, natančneje na njegov najpomembnejši dosežek – izum diferencialnega in integralnega računa.

Leibniz se je rodil leta 1646 v Leipzigu, umrl pa v Hannovru 70 let kasneje. Oče Friedrick je bil profesor moralne filozofije na leipziški univerzi in tudi mati Katarina Schmuck je bila iz akademske družine. Že kot otroka so ga spodbujali, da je brskal po veliki očetovi knjižnici, kar je iz malega Leibniza kmalu naredilo nenasitnega bralca. Ko je bil star 15 let, je začel študij filozofije in prava na leipziški univerzi. Pri 20 letih je napisal pomembno razpravo o moralni filozofiji, za katero so mu na Univerzi v Altdorfu podelili doktorat (in to potem, ko so mu ga v Leipzigu zavrnili z izgovorom, da je premlad).

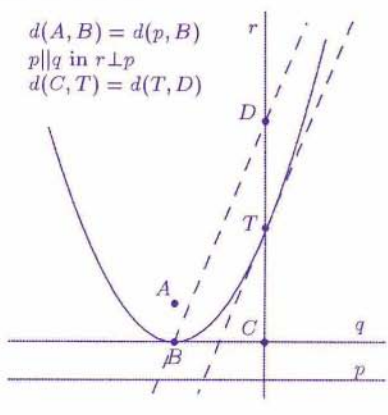
V obdobje študija v Leipzigu sodi tudi prvo Leibnizovo resno srečanje z matematiko: med poletnim obiskom v Jeni leta 1663 je izrabil priložnost, da je študiral Evklidove Elemente, delo, ki je imelo takrat že dvatisočletni sloves modela matematičnega aksiomatičnega sklepanja. Pomanjkanje formalne matematične izobrazbe je zaznamovalo vse Leibnizovo ukvarjanje z matematiko. Čeprav je bil pravi vrelec daljnosežnih idej in dejanski začetnik mnogih matematičnih področij, od kombinatorike in matematične logike do topologije, je v njegovem delu večina teh zamisli ostala le v povojih – bile so nezadostno dodelane, da bi lahko zbudile pozornost sodobnikov. Leta 1666 je izšlo Leibnizovo prvo matematično delo *Dissertatio de arte combinatoria*, v katerem je skušal razviti 'račun logičnih resnic', predhodnika sodobne matematične logike. Kot je sam napisal, je '*. . . želel podati metodo, v kateri bi bile razumske resnice prevedene v neko vrst računa. Ta bi bil hkrati nekakšen jezik ali univerzalna pisava, vendar bi se zelo razlikoval od vseh dozdaj zasnovanih, ker bi v njem črke in celo besede vodile razum, napake pa bi bile samo računske*'.

Po doktoratu je Leibniz dobil službo pri volilnem knezu v Mainzu. Ta mu je med ostalim omogočala, da je prebil veliko časa v Parizu, kjer je spoznal Christiana Huygensa (članek o njem je bil objavljen v 6. številki XXII. letnika Preseka), enega najbolj znanih astronomov in matematikov tistega časa. Prijateljstvo s Huygensom je bilo odločilno za Leibnizov nadaljnji matematični razvoj. V letih od 1672 do 1676 je nastal največji del Leibnizovih matematičnih rezultatov iz teorije nealgebrajskih enačb, številskih vrst, diferenčnega računa in interpolacije funkcij. Najpomembnejše od vsega pa je, da se je takrat oblikoval tudi njegov diferencialni in integralni račun ali, kot so ga takrat imenovali, infinitezimalni račun.

V sedemnajstem stoletju je beseda infinitezimalni račun označevala metode za računanje ploščin, prostornin in težišč, torej tisto, čemur danes običajno pravimo integralni račun. Vemo, da ravninskemu liku, omejenemu z daljicami, lahko določimo ploščino tako, da ga razrežemo na trikotnike. Če pa lik oklepajo bolj zapletene krivulje, se ta prijem seveda ne obnese. Že stari Grki (Arhimed, Evdoks in drugi) so poznali metodo izčrpavanja, pri kateri so v krivočrtni lik vrisovali vedno manjše trikotnike, in znali sešteti ploščine teh neskončno mnogih trikotnikov ter tako izračunati željeno ploščino. Pri tem je bilo potrebno veliko računske in geometrične spretnosti. Matematiki šestnajstega in sedemnajstega stoletja (Cavalieri, Roberval, Toricelli, Fermat, Pascal in drugi) so te metode še izostrili: praviloma so lik ali telo rezali na 'neskočno' majhne kose – imenovane infinitezimale – in potem ploščine in prostornine dobili s seštevanjem. Eden ključnih korakov, ki so omogočili, da posamezne metode dobijo sistematično obliko, je naredil Descartes (članek o njem je bil objavljen v 6. številki lanskega letnika Preseka), ko je začel krivulje upodabljati v (po njem poimenovanih) kartezičnih koordinatah. S tem je bil poudarek prenešen z geometričnega objekta – krivulje na algebrajski objekt – funkcijo, podano s formulo, katere graf je obravnavana krivulja. Za končni korak, določanje ploščine pod krivuljo s pomočjo operacije na funkciji, ki to krivuljo podaja, je bilo potrebno odkriti še, da je ta naloga tesno povezana z določanjem tangente na dano krivuljo.

Problem določanja tangent danes rešujemo z diferencialnim računom, t. j. z odvajanjem. Do sedemnajstega stoletja pa so matematiki za konstrukcijo tangent v glavnem uporabljali geometrične metode. Oglejmo si dva primera. Vsi znamo konstruirati tangento na krožnico: v izbrani točki krožnice potegnemo premico pravokotno na polmer. Kako pa bi dobili tangento na parabolo v kaki izbrani točki?

Naj bo recimo parabola podana geometrično, t. j. kot množica točk ravnine, ki so enako oddaljene od dane točke A in dane premice p. Naj bo T točka na paraboli, skozi katero želimo potegniti tangento. Vpeljimo še naslednje oznake: B naj bo razpolovišče najkrajše daljice med A in p; q naj bo premica skozi B, vzporedna s p; r naj bo premica skozi T, pravokotna na p; C naj bo presečišče q in r; D naj bo točka zrcalna točki C glede na T. Potem je tangenta na parabolo skozi točko T vzporedna s premico skozi B in D. Dokaz, da je konstrukcija pravilna, prepuščamo bralcem.



(Namig: verjetno je najlažje opisano konstrukcijo prevesti v koordinatni zapis in pokazati, da se premica dotika parabole v točki T.)

Obstajajo podobne konstrukcije za določanje tangent tudi za druge krivulje, težava je le, da nam ne dajo sistematičnega postopka, ki bi vedno pripeljal do rešitve. Vprašanje je pomembno, kajti veliko matematičnih problemov lahko prevedemo na iskanje tangente z določenimi lastnostmi. Na primer, če je krivulja narisana v koordinatnem sistemu kot graf neke funkcije, potem je v točkah, kjer zavzame funkcija svojo največjo in najmanjšo vrednost, tangenta na krivuljo vzporedna z absciso. Če bi poznali postopek za iskanje tangente na poljubno krivuljo, bi nam to olajšalo problem iskanja največjih in najmanjših vrednosti funkcij. Tako sistematično rešitev nam daje odvod funkcije, ki je osnovni pojem diferencialnega računa.

Angleška matematika John Wallis in Isaac Barrow (Newtonov učitelj in zaščitnik) sta bržda prva opazila, da je za določanje ploščine pod krivuljo dovolj, če znamo določiti krivuljo, ko so podane njene tangente. To dejstvo sta uporabljala v geometrični obliki. Vidimo torej, da so se mnogi znameniti matematiki zelo približali današnji obliki infinitezimalnega računa. Za dokončno sintezo teh dvatisočletnih geometričnih in nekoliko sodobnejših algebrajskih poskusov sta poskrbela Newton in Leibniz. Oba sta obravnavala krivulje kot grafe funkcij, znala sta konstruirati tangento s pomočjo odvodov in izračunati ploščino pod krivuljo s pomočjo integriranja funkcije. Oba sta tudi ugotovila, da je v tej algebrajski formulaciji računanje ploščine z integracijo funkcije obratna operacija k odvajanju, torej določanju tangente na krivuljo. Temu dejstvu danes pravimo Newton-Leibnizov izrek oziroma kar osnovni izrek matematične analize.

Kljub izjemnim znanstvenim dosežkom Leibnizu ni uspelo dobiti profesorskega mesta ne v Parizu ne v Londonu, čeprav je to nekajkrat poskušal, zato se je preselil v Hannover, kjer je stopil v službo mogočnega grofa Brunswick – Lüneberga kot svetovalec, knjižničar in nadzornik del. Ko je leta 1679 grof umrl, so njegovi nasledniki naročili Leibnizu, da sestavi podrobno genealogijo njihove plemiške družine z namenom, da utemelji njihove številne dinastične zahteve. Te bizarne naloge se je lotil z neverjetnim žarom, ki ga lahko vsaj delno razumemo, če vemo, da mu je omogočila popotovanja po celi Evropi, obiske knjižnic in srečanje z mnogimi umnimi ljudmi. Poleg brskanja po zaprašenih listinah je Leibniz namreč našel čas tudi za druge dejavnosti. Ukvarjal se je s filozofijo, predvsem z etiko in teologijo; ustanovil in podpiral je gibanje, ki je poskušalo združiti rimsko cerkev z novonastalimi protestantskimi ločinami; ustanovil je nekaj znanstvenih akademij, najpomembnejši, berlinski Akademiji znanosti pa je dolga leta tudi predsedoval.

V tem času je njegova matematična dejavnost zamrla, kljub temu pa je leta 1682 sodeloval v nastajanju znanstvene revije *Acta Eruditorum*, v kateri je potem objavil svoji najslavnejši matematični deli *Nova methodis pro maximus et minimus* (Nova metoda za maksimume in minimume, 1684) in *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (O skriti geometriji in analizi nedeljivih in neskončno majhnih količin, 1686). V prvem je izpeljal osnovna pravila odvajanja in vpeljal oznako $\frac{dy}{dx}$, ki jo še danes uporabljamo. V drugem pa je vpeljal oznako $\int$ za integral in dokazal osnovni izrek matematične analize, ki je verjetno najpomembnejši izrek višje matematike nasploh. Poudariti moramo pa, da Leibniz ni bil prvi, ki je poznal te rezultate. Ker gre za eno najbolj zanimivih in kontroverznih epizod v zgodovini matematike, jo bomo na kratko povzeli.

Koreni diferencialnega in integralnega računa segajo zelo daleč, vse tja do starih Grkov, ki so že poznali metode za določanje tangent na krivulje in računanje ploščin likov. Njihove metode so bile izrazito geometrične in zato niso bile primerne za formalno računanje. Šele simbolični račun, ki ga je prvi razvil Francois Viète (danes bi temu rekli računanje s splošnimi števili), in vpeljava opisovanja geometričnih objektov s pomočjo koordinat sta odprla pot rojstvu integralnega in diferencialnega računa. V obdobju med 1550 in 1660 so mnogi matematiki s pridom uporabljali nove prijeme za lažje reševanje starih problemov in spopadanje z novimi, ki so bili do takrat nerešljivi. Vendar pa so se skoraj vsi teh problemov lotevali bodisi geometrično bodisi algebrajsko. Kot smo že omenili, sta Newton in Leibniz prva naredila odločilni preboj in združila dotedanje prijeme v novo vejo matematike – v diferencialni in integralni račun. Prvemu je to uspelo, sodeč po ohranjenih zapiskih in pismih, v letih 1665-1666, drugemu pa v času bivanja v Parizu, 1673-1676. Čeprav Newton svojih rezultatov ni objavil, je bil Leibniz z njimi delno seznanjen v dveh pismih, ki jih je leta 1676 dobil od Newtona ob posredovanju Nemca Henryja Oldenburga, takratnega tajnika Kraljeve družbe. To ga je spodbudilo, da je svojim dosežkom dal dokončno obliko in jih v obdobju 1684-1693 tudi objavil. Njegove metode so se takoj razširile med matematiki in imele za posledico spektakularne rezultate, še najbolj v delih bratov Bernoulli. Ta bliskovit napredek dobro ponazarja dejstvo, da so skoraj vsi rezultati matematične analize, ki se jih danes učimo na osnovni stopnji, vključno s prvim letnikom fakultete, nastali že pred letom 1700. Prvi učbenik, ki je vseboval Leibnizove rezultate, je leta 1696 objavil francoski matematik L'Hospital. Šele kasneje, v letih 1704-1736, je tudi Newton objavil svoje rezultate, čeprav je že iz njegovih zgodnejših del, predvsem iz njegovega najpomembnejšega dela *Philosophie Naturalis Principia Mathematica* (Matematične osnove naravne filozofije, 1687) razvidno, da je za izpeljevanje rezultatov že uporabljal odvajanje in integriranje. Treba je še povedati, da je Newton svoje dosežke leta 1669 in 1671 ponudil Kraljevi družbi in Univerzi v Cambridgu v objavo, vendar so mu jih, kakor se to danes neverjetno sliši, zavrnili, ker so menili, da so nezanimivi. Tako se je zgodilo, da so prve objave teh osnovnih rezultatov današnje matematike bile Leibnizove. Ko so njegovi članki povzročili pravi plaz novih matematičnih rezultatov, se je med Newtonom in Leibnizom ter njunimi učenci in pristaši razvila ogorčena in občasno zelo groba razprava o prvenstvu, ki je obema, vendar predvsem Leibnizu, zagrenila zadnja leta življenja. Danes, ko imamo na razpolago ne le objavljena dela temveč tudi zapiske in pisma, je nedvomno, da je do osnovnih rezultatov vendarle prej prišel Newton, večji vpliv na razvoj matematike pa je imel Leibniz. Do svojih rezultatov je prišel sam, neodvisno od Newtona, bili so v matematično bolj zreli obliki, njegov zapis, oznake in terminologija so prevladali in jih še danes uporabljamo.

Zadnja leta Leibnizovega življenja niso bila preveč srečna. Poleg prerekanja z Newtonom in njegovimi privrženci je nadaljeval še s preučevanjem dinastičnih zvez Brunswickovih, ki pa takrat družine niti niso več zanimale. Ko je leta 1716 Leibniz umrl, je bil na pogrebu prisoten le njegov osebni tajnik. Genealogijo Brunswickovih so objavili šele leta 1843.

Petar Pavešić

PODALJŠANA LANGFORDOVA ZAPOREDJA – Rešitev s str. 53

Iščemo najmanjše naravno število n, za katero obstaja zaporedje $3n$ števil, v katerem vsako od števil med 1 in n nastopa natanko trikrat, pri čemer je med vsakima zaporednima pojavitvama števila i natanko i drugih členov zaporedja. Taka zaporedja smo imenovali podaljšana Langfordova zaporedja. Krajši premislek in nekaj poskušanja nas poučita, da zelo kratka zaporedja take oblike ne obstajajo. Zato se iskanja lotimo z računalnikom. Navedeni program zaporedoma poskuša zgraditi vedno daljša zaporedja zahtevane oblike in se ustavi, ko uspe najti prvo podaljšano Langfordovo zaporedje. Pri tem uporablja metodo sestopanja. Zaporedje gradi tako, da vanj postopno dodaja nova števila in sproti skrbi, da ima že določeni del zaporedja željeno lastnost. Najprej v zaporedje postavi vse tri pojavitve števila n, in sicer tako, da je med zaporednima pojavitvama prostora še za natanko n drugih členov. Nato pri že postavljenih številih n na prosta mesta postavi tri števila $n-1$, zopet z ustreznim razmikom. Potem sledi postavljanje števil $n-2$, itn. Če se postavljanje zaplete, se vrne nivo nazaj in poskuša z novo postavitvijo trojke prejšnjih števil. Tako sistematično pregleduje možnosti, dokler ne najde iskanega zaporedja ali pa ne pregleda vseh možnosti in ugotovi, da iskano zaporedje izbrane dolžine ne obstaja.

Rešitev je seveda sprogramirana rekurzivno.