PREGRADIMO TRIKOTNIK, 2. del

V prvem delu članka, ki je izšel v prejšnji številki Preseka, smo našli najkrajšo *daljico*, ki pregradi dani trikotnik na dela s predpisanima ploščinama. Zdaj se bomo lotili splošnejše naloge, poiskali bomo najkrajšo *krivuljo*, ki pregradi dani trikotnik na dva dela s predpisanima ploščinama. Ta naloga je precej težja od prejšnje. Če bi jo hoteli obravnavati z vso matematično strogostjo, bi že na samem začetku naleteli na težave. Morali bi namreč korektno opredeliti pojme, kot so ploščina ravninskega lika, krivulja in dolžina krivulje. Ker to ni preprosto in presega okvir Preseka, si bomo delo olajšali. Z definicijo ploščine si ne bomo belili glave, pa tudi pojma krivulja ne bomo natančno opredelili. Krivuljo si bomo predstavljali kot zelo tanko neraztegljivo nepretrgano nitko z dvema koncema, položeno na ravnino, tako da se pokrivata kvečjemu njena konca. Če to nitko (krivuljo) napnemo in s tem zravnamo, dobimo daljico, katere dolžino razglasimo za dolžino krivulje.

Postavljeno nalogo bomo ugnali v nekaj korakih in si pomagali z naslednjim, zelo pomembnim rezultatom.

Izoperimetrični izrek. *Krog ima večjo ploščino kot vsi drugi ravninskimi liki z enakim obsegom.*

Tu si predstavljamo, da je ravninski lik območje ravnine, ograjeno s sklenjeno krivuljo, obseg lika pa dolžina te krivulje. Obstaja nekaj elementarnih dokazov izoperimetričnega izreka (brez uporabe višje matematike), vendar so precej zapleteni. Med njimi naj omenim zelo lep dokaz katalonskega matematika Santalója, ki je obdelan v Vidavovi knjižici *Rešeni in nerešeni problemi matematike* iz zbirke Sigma.

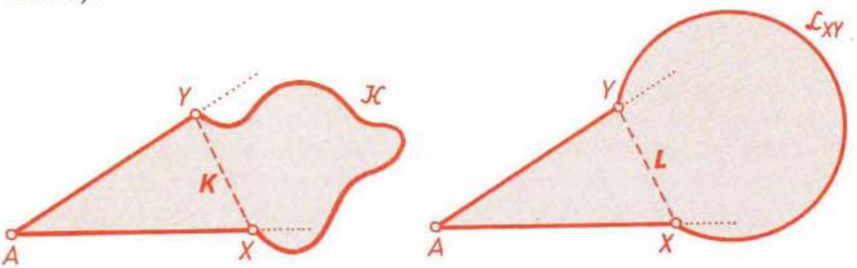
In zdaj k nalogi! Krivulja, ki razdeli trikotnik na dva dela, ima krajišči na stranicah trikotnika, torej povezuje točki krakov enega od notranjih kotov trikotnika. Zato se bomo najprej lotili naslednje naloge:

Poišči najkrajšo krivuljo, ki veže točki na krakih danega konveksnega kota in odreže od tega kota lik z dano ploščino.

Tudi ta naloga ni preprosta in ji bomo kos postopoma. Najprej bomo predpisali dolžino krivulje in njeni krajišči na kraku kota ter dokazali naslednji rezultat:

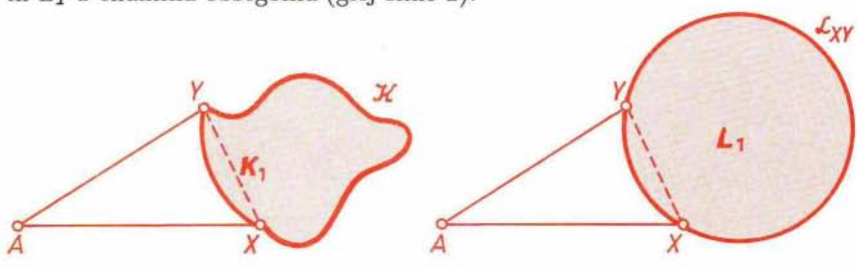
Trditev 1. *Dan je konveksen kot z vrhom A in od A različni točki X in Y na njegovih krakih. Med vsemi krivuljami dane dolžine $l > |XY|$, ki vežejo X in Y, ogradi skupaj z daljicama AX in AY lik z največjo ploščino krožni lok $\mathcal{L}_{XY}$ s krajiščema X in Y, ki leži na nasprotnem bregu premice XY kot točka A.*

Dokaz. Vzemimo poljubno krivuljo $\mathcal{K}$ dolžine l, ki veže točki X in Y ter leži na nasprotnem bregu premice XY kot A. Bralca vabimo, da premisli, zakaj smemo pri dokazu brez škode privzeti zadnji pogoj. Zaznamujmo s K lik, ki ga ograjujeta krivulja $\mathcal{K}$ in daljici AX, AY, z L pa unijo trikotnika AXY in krožnega odseka, ki ga določa lok $\mathcal{L}_{XY}$ (glej sliko 1).



Slika 1.

Če v likih K in L trikotnik AXY nadomestimo s krožnim odsekom, ki ga določa lok, komplementaren loku $\mathcal{L}_{XY}$ (na isti krožnici), dobimo lika K_1 in L_1 z enakima obsegoma (glej sliko 2).



Slika 2.

Lik L_1 je krog, zato ima po izoperimetričnem izreku vsaj tolikšno ploščino kot K_1. Od tod že sledi, da ploščina lika K ne presega ploščine lika L in da imata enaki ploščini le takrat, kadar je $\mathcal{K} = \mathcal{L}_{XY}$. Dokaz trditve je sklenjen.

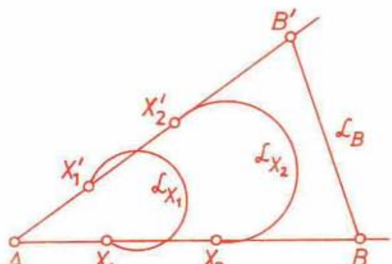
Trditev 1 zlahka razširimo tudi na primer, da se katera od točk X in Y (ali obe) ujema z A, vendar podrobnosti prepustimo bralcu. V naslednjem koraku bomo sprostili točki X in Y iz trditve 1 in ju premikali po kraku kota.

Trditev 2. *Med vsemi krivuljami dane dolžine $l > 0$, ki vežejo kaki točki X in Y s krakov danega konveksnega kota $\mathcal{A}$ z vrhom A, ograjuje skupaj z daljicama AX in AY, lik z največjo ploščino lok $\mathcal{L}$ krožnice s središčem v točki A.*

Dokaz. Če za par točk X in Y z različnih krakov kota $\mathcal{A}$ velja $|XY| < < l$, mu priredimo krožni lok $\mathcal{L}_{XY}$ iz trditve 1, če pa velja $|XY| = l$, mu priredimo daljico XY. Družino vseh teh lokov in daljic zaznamujmo z Ω.

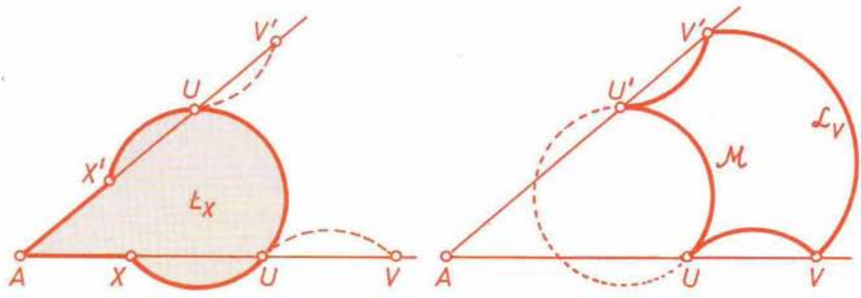
Pri vsakem strogo pozitivnem številu $z \leq l$ si oglejmo poddružino $\Omega_z \subset \Omega$, sestavljeno iz tistih lokov $\mathcal{L}_{XY}$ oziroma daljic XY (pri $z = l$) iz Ω, ki ustrezajo pogoju $|XY| = z$. Največjo ploščino med trikotniki AXY (ki ustrezajo pogoju $|XY| = z$) ima po posledici iz prvega dela članka (glej Presek 2, str. 86) enakokraki trikotnik z osnovnico XY. Ker so poleg tega pri $z < l$ krožni odseki, ki jih določajo loki $\mathcal{L}_{XY}$ iz Ω_z, skladni, med vsemi loki $\mathcal{L}_{XY}$ iz Ω_z, $z < l$, (oziroma daljicami iz Ω_l) skupaj z AX in AY ograjuje lik z največjo ploščino lok $\mathcal{L}_{XY}$ (oziroma daljica XY), ki ustreza pogoju $|AX| = |AY|$. Ta lok pri $z < l$ (oziroma daljica pri $z = l$) je določen(a) že s krajiščem X na kraku kota $\mathcal{A}$. Njegovo (njeno) drugo krajišče bomo označili z X', lok (oziroma daljico) pa z $\mathcal{L}_X$ (slika 3).

Premikajmo točko X po kraku kota $\mathcal{A}$ od njegovega vrha A do točke B, v kateri se lok $\mathcal{L}_X$ zravna v daljico $\mathcal{L}_B$. Bralec naj se za vajo prepriča, da velja enakost $|AB| = l/(2\sin\frac{\alpha}{2})$, kjer je α velikost kota $\mathcal{A}$. Pri določenem položaju točke X med A in B ima lik L_X, ograjen z $\mathcal{L}_X$ in daljicama AX ter AX', največjo ploščino.



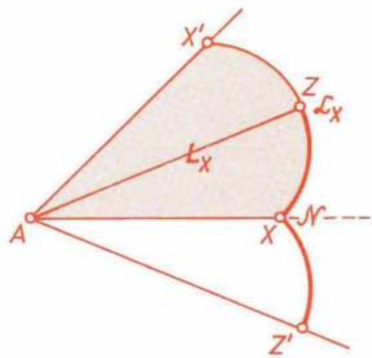
Slika 3.

Dokažimo najprej, da v tem (ekstremnem) položaju $\mathcal{L}_X$ leži v kotu $\mathcal{A}$. Denimo, da lok $\mathcal{L}_X$ sega čez $\mathcal{A}$. Potem seka kraka AX in AX' (v istem zaporedju) v točkah $U \neq X$ in $U' \neq X'$ ter tako razpade na tri loke (glej sliko 4). Lok s krajiščema X in U prezrcalimo čez U na lok s krajiščama U in V, lok s krajiščema X' in U' pa na lok s krajiščema U' in V'. Dobljeni zrcalni sliki nato združimo z lokom $\mathcal{L}_X \cap \mathcal{A}$ v krivuljo $\mathcal{M}$. Ta je sestavljena iz treh krožnih lokov, ima dolžino l in skupaj z daljicama AV ter AV' ograjuje lik z enako ploščino kot lok $\mathcal{L}_X$. Po trditvi 1 krožni lok $\mathcal{L}_V$ skupaj z daljicama AV in AV' ograjuje lik z večjo ploščino, zato lok $\mathcal{L}_X$ v ekstremnem položaju leži v kotu $\mathcal{A}$. Dokažimo, da se $\mathcal{L}_X$ ujema z lokom $\mathcal{L}$, opredeljenim v besedilu trditve, ki jo dokazujemo.



Slika 4.

Zaznamujmo z Z sečišče simetrale kota $\mathcal{A}$ z $\mathcal{L}_X$ (slika 5). Prezrcalimo del loka (oziroma daljice) $\mathcal{L}_X$ s krajiščema X in Z preko premice AX in ga združimo z njegovo zrcalno sliko v krivuljo $\mathcal{N}$ s krajiščema Z in Z'. Krivulja $\mathcal{N}$ povezuje točki Z in Z' s krakov kota ZAZ', skladnega s kotom $\mathcal{A}$, ima dolžino l in skupaj z daljicama AZ ter AZ' ograjuje lik, ki ima enako ploščino kot L_X.



Slika 5.

Iz trditve 1 in ekstremnega položaja $\mathcal{L}_X$ sledi, da je krivulja $\mathcal{N}$ krožni lok. Središče S nosilne krožnice tega loka tedaj leži na premici AX. Ker tudi $\mathcal{L}_X$ leži na isti krožnici, S leži tudi na premici AZ. Oboje hkrati velja samo takrat, kadar se S ujema z A, zato se $\mathcal{L}_X$ ujema z lokom $\mathcal{L}$. S tem je dokaz sklenjen.

S trditvijo 2 bi lahko pomagali Didoni, mitološki feničanski kraljici in ustanoviteljici Kartagine. Ob nakupu zemlje na libijski obali, kamor je s pristaši zbežala iz rodnega Tira, si je Didona namreč zakuhala naslednji problem:

Med vsemi krivuljami dane dolžine, ki vežejo kaki točki na dani premici, poišči tisto, ki skupaj s premico ograjuje lik z največjo ploščino.

Didona je bila prebrisana in je kupila le toliko zemlje na obali, kolikor je more obseči volovska koža. Domačini so ji nasedli in za majhno vsoto prodali mnogo več, kot so mislili prodati. Didona je namreč volovsko kožo razrezala na tanke jermene, jih zvezala v trak (krivuljo) in z njim zajela precejšen del ozemlja ob ravni obali (premici), na katerem so zgradili kartaginsko trdnjavo. Ker je hotela čimvečji kos zemlje, se je znašla pred omenjenim problemom. Še zdaj podoben splošnejši matematični problem imenujemo Didonina naloga.

Zdaj lahko brez težav rešimo nalogo, ki smo si jo zadali.

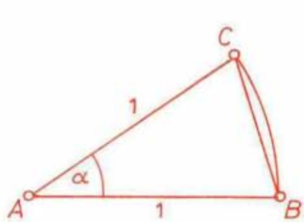
Trditev 3. *Najkrajša krivulja, ki od danega konveksnega kota velikosti α z vrhom A odreže lik z dano ploščino p, je lok krožnice s središčem v A. Polmer te krožnice meri $\sqrt{2p/\alpha}$, lok pa $\sqrt{2p\alpha}$.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{K}$ krivulja s krajiščema na krakih kota, ki odreže od kota lik s ploščino p. Če $\mathcal{K}$ ni krožni lok s središčem v A, obstaja po trditvi 2 enako dolg krožni lok $\mathcal{L}$, ki odreže od kota krožni izsek s ploščino $q > p$. Podobnostna preslikava s središčem v A in koeficientom raztega $\sqrt{p/q} < 1$ preslika $\mathcal{L}$ v krajši krožni lok, ki od kota odreže krožni izsek s ploščino p. Dokaz trditve je s tem sklenjen.

Za rešitev prvotne naloge bomo potrebovali še naslednjo neenakost.

Lema. *Za vsak $\alpha > 0$ velja $\sin\alpha < \alpha$.*

Dokaz. Ker je $\sin\alpha \leq 1$, smemo brez škode za splošnost dokaza privzeti, da je $\alpha \leq 1$. Naj bo ABC enakokraki trikotnik s podatki $|AB| = |AC| = 1$, $\alpha = \angle BAC$ (slika 6). Njegova ploščina meri $\frac{1}{2}\sin\alpha$ in je seveda manjša od ploščine krožnega izseka, ki pripada tetivi BC v krogu s središčem A. Ker ploščina izseka meri $\frac{1}{2}\alpha$, je res $\sin\alpha < \alpha$.



Slika 6.

Odgovor na prvotno nalogo zdaj strnimo v

Izrek. *Najkrajša krivulja, ki razdeli dani trikotnik ABC na dela s ploščinama p_1 in p_2 ($p_1 \leq p_2$), je lok krožnice s središčem v oglišču ob najmanjšem kotu trikotnika, in meri $\sqrt{2p_1\alpha}$, kjer je α velikost najmanjšega kota trikotnika ABC.*

Dokaz. Uporabimo običajne oznake za elemente trikotnika ABC in predpostavimo, da velja $\alpha \leq \beta$ in $\alpha \leq \gamma$. Po trditvi 3 meri dolžina iskane krivulje vsaj $\sqrt{2p_1\alpha}$. Tako dolžino ima lok $\mathcal{L}$ krožnice s središčem A, središčnim kotom α in polmerom $r = \sqrt{2p_1/\alpha}$. Ko bomo ugotovili, da ta lok leži v trikotniku ABC, bo dokaz izreka sklenjen.

Ker iz pogojev in leme sledi

$$r^2 = \frac{2p_1}{\alpha} \leq \frac{p(ABC)}{\alpha} = \frac{bc}{2}\frac{\sin\alpha}{\alpha} < \frac{bc}{2},$$

bi iz neenakosti $r \geq b$ dobili $b^2 < bc/2$ in tedaj $2b < c$, od tod pa zaradi $a \leq b$ še $a + b \leq 2b < c$. Slednje seveda ni res, zato je $r \leq b$. Podobno vidimo, da je $r \leq c$.

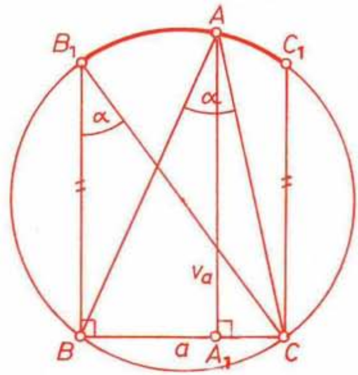
Kadar vsaj eden od kotov β in γ ni oster, iz neenakosti $r \leq b$ in $r \leq c$ sledi, da lok $\mathcal{L}$ leži v trikotniku ABC. Če pa sta kota β in γ ostra, moramo dokazati neenakost $r \leq v_a$, kjer je v_a dolžina višine na stranico BC.

Trikotniku ABC očrtajmo krožnico, z A_1 pa zaznamujmo nožišče njegove višine iz oglišča A (slika 7). Vzporednici premice AA_1 skozi B in C naj sečeta krožnico v točkah B_1 in C_1. Potem leži A na krajšem loku očrtane krožnice s krajiščema B_1 in C_1. Ker je poleg tega po izreku o obodnem kotu

$$\angle BB_1C = \angle BAC = \alpha,$$

velja

$$v_a = |AA_1| \geq |BB_1| = a \operatorname{ctg} \alpha.$$



Slika 7.

Zaradi $\alpha \leq \beta$ in $\alpha \leq \gamma$ velja tudi $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$ in tedaj $\cos\alpha \geq \frac{1}{2}$. Od tod z uporabo leme sledi

$$v_a \geq a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \geq \frac{a}{2\sin\alpha} > \frac{a}{2\alpha},$$

nato

$$\frac{p(ABC)}{\alpha} = \frac{av_a}{2\alpha} < v_a^2$$

in zaradi $r^2 \leq p(ABC)/\alpha$ še $r < v_a$.

Sklenimo prispevek z nalogami.

1. Najmanj koliko mora biti oddaljena točka X od vrha A kota $\mathcal{A}$, da lok $\mathcal{L}_X$ iz trditve 2 leži v kotu $\mathcal{A}$?
2. Dan je oster kot z vrhom A in od A različna točka X na njegovem kraku. Med vsemi krivuljami dane dolžine, ki vežejo točko X s kako točko Y na drugem kraku kota, poišči tisto, ki skupaj z daljicama AX in AY ogradi lik z največjo ploščino.
3. Krivulja $\mathcal{K}$ razdeli kvadrat s stranico dolžine 1 na dva dela, katerih ploščini sta v razmerju $m : n$. Dokaži, da pri pogoju $\frac{1}{\pi-1} \leq \frac{m}{n} \leq \pi-1$ dolžina $\mathcal{K}$ meri vsaj 1.
4. Dokaži, da je premer kroga najkrajša krivulja, ki razpolavlja njegovo ploščino.

Boris Lavrič

26. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Mednarodna fizikalna olimpiada je potekala od 5. do 12. julija 1995 v Canberri, Avstralija. To je bila prva "zimska" fizikalna olimpiada, saj je v tem času na južni polobli zima.

Na olimpiadi je sodelovalo 246 tekmovalcev iz 51 držav. Ob finančni podpori Ministrstva za šolstvo in šport se je tudi slovenska ekipa udeležila olimpiade v popolni sestavi: pet tekmovalcev ter dva spremljevalca, člana mednarodne komisije. Za Slovenijo so na olimpiadi tekmovali: Martin KLANJŠEK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Jure BABNIK, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana; Marko ŽNIDARIČ, II. gimnazija Maribor; Andrej BARTOLIČ, Srednja šola Nova Gorica; Sašo PUKŠIČ, Srednja tehniška šola Celje. Spremljevalca sva bila Jure Bajc (Fakulteta za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko) in Ciril Dominko (Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije).

Ekipa je imela konec maja enotedenske priprave na Fakulteti za matematiko in fiziko. Več priprav ni bilo mogoče izvesti, ker zaradi mature tekmovalci niso imeli časa.

Tudi letos so tekmovalci najprej morali v petih urah rešiti tri teoretične naloge in nato po enodnevnem odmoru še v petih urah narediti dva eksperimenta in napisati poročili. Skupaj torej pet enakovrednih nalog. Tako kot že nekaj let so bili tudi letos bili najbolj uspešni tekmovalci LR Kitajske. Vseh pet je dobilo zlato medaljo, njihov tekmovalec Yu Haitao pa je bil absolutni zmagovalec olimpiade.