PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **23** (1995/1996)
Številka 2
Strani 86–88

Boris Lavrič:

PREGRADIMO TRIKOTNIK, 1. del

Ključne besede: matematika, geometrija, trikotniki, ploščina, izoperimetrični izrek.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/23/1259-Lavric.pdf

PREGRADIMO TRIKOTNIK, 1. del

Dani trikotnik želimo pregraditi s čimkrajšo krivuljo na dva dela s predpisanima ploščinama. Kako naj to storimo? V prvem delu članka si bomo olajšali nalogo, tako da se bomo omejili na najpreprostejše pregrade – daljice; v drugem delu, ki bo na vrsti v naslednji številki Preseka, pa bomo to olajšavo opustili in se lotili splošnega problema.

Vsaj en lik, ki nastane pri pregraditvi trikotnika T z daljico, je trikotnik z danim kotom (enim od notranjih kotov trikotnika T), zato se najprej lotimo naslednje naloge:

Naloga. *Dan je konveksen kot z vrhom A. Med vsemi trikotniki AXY s predpisano ploščino p in ogliščema X ter Y na različnih krakih kota poišči tistega, ki ima najkrajšo stranico XY.*

Naloga je smiselna, kadar kot ni niti izrojen niti iztegnjen, torej takrat, kadar velja $0 < \alpha = \angle XAY < \pi (= 180°)$. Zaznamujmo

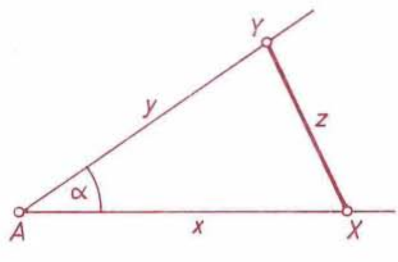
$$x = |AX|,\ y = |AY|,\ z = |XY|$$

in zapišimo kosinusni izrek za stranico XY trikotnika AXY:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha.$$

Če preoblikujemo izraz na desni strani enačaja in upoštevamo formulo

$$p = \frac{1}{2}xy\sin\alpha$$



za ploščino trikotnika AXY, dobimo po kratkem računu

$$\begin{aligned} z^2 &= (x-y)^2 + 2xy(1-\cos\alpha) = \\ &= (x-y)^2 + 4p\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \\ &= (x-y)^2 + 4p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Od tod brž sledi, da doseže z najmanjšo vrednost, kadar je $x = y$, in da je tedaj $z = 2\sqrt{p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Iz formule za ploščino p dobimo tudi vrednost $x = y = \sqrt{2p/\sin\alpha}$. Nalogo smo rešili in s tem dokazali naslednjo

Trditev. *Med vsemi trikotniki AXY s predpisano ploščino p in ogliščema X in Y na krakih danega neizrojenega kota z vrhom A in velikostjo $\alpha < \pi$ ima najkrajšo stranico XY enakokraki trikotnik s podatki*

$$|AX| = |AY| = \sqrt{\frac{2p}{\sin\alpha}}, \quad |XY| = 2\sqrt{p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Posledica. *Med vsemi trikotniki AXY z ogliščema X in Y na krakih danega neizrojenega neiztegnjenega konveksnega kota z vrhom A in s predpisano dolžino stranice XY ima največjo ploščino enakokraki trikotnik z osnovnico XY.*

Dokaz. S podobnostno preslikavo P_{XY}, ki ima središče A in koeficient raztega $\sqrt{1/p(AXY)}$, kjer je $p(AXY)$ ploščina trikotnika AXY, preslikajmo trikotnik AXY na trikotnik $AX'Y'$. Brez težav vidimo, da ima trikotnik $AX'Y'$ ploščino 1. Med trikotniki $AX'Y'$, ki ustrezajo trikotnikom AXY iz posledice, ima po trditvi najkrajšo stranico $X'Y'$ enakokraki trikotnik z osnovnico $X'Y'$. Če upoštevamo še koeficiente raztega podobnostnih preslikav P_{XY}, vidimo, da ima med trikotniki AXY največjo ploščino enakokraki trikotnik AXY z osnovnico XY.

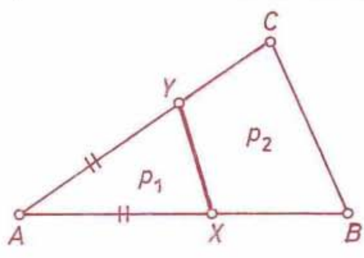
Bralca vabimo, da poskusi dokazati gornjo posledico brez uporabe prejšnje trditve.

Vrnimo se zdaj k nalogi in zaznamujmo s p_1 in p_2 ploščini likov, na katera naj razpade trikotnik ABC s podatki $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, če ga pregradimo z daljico. Vsota $p_1 + p_2$ se seveda ujema s ploščino $p(ABC)$ trikotnika ABC. Predpostavimo, da je $a \le b$, $a \le c$ in $p_1 \le p_2$. Potem kot $\alpha = \angle BAC$ ne presega drugih dveh notranjih kotov trikotnika ABC. Pri obravnavanih pregraditvah trikotnika ABC z daljico vedno dobimo trikotnik s ploščino p_1 ali p_2, odrezan od notranjega kota trikotnika ABC, zato po trditvi dolžina pregradne daljice meri vsaj $2\sqrt{p_1\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Vendar še ne vemo, če je taka pregrada trikotnika sploh možna. Ugotoviti bi namreč morali, da točki X in Y s poltrakov kota BAC, ki določata enakokraki trikotnik AXY iz trditve, ležita na stranicah AB in AC. To bomo tudi storili, tako da bomo dokazali neenakosti

$$b = |AC| > \sqrt{\frac{2p_1}{\sin\alpha}}$$

in

$$c = |AB| > \sqrt{\frac{2p_1}{\sin\alpha}}.$$



Zaradi $p_1 \leq p_2$ velja

$$2p_1 \leq p_1 + p_2 = p(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

in tedaj $\sqrt{bc/2} \geq \sqrt{2p_1/\sin\alpha}$. Če upoštevamo, da poleg tega iz

$$c < a + b \leq 2b \quad \text{in} \quad b < a + c \leq 2c$$

sledi $b > \sqrt{bc/2}$ in $c > \sqrt{bc/2}$, takoj dobimo iskani neenakosti. Dokazali smo

Izrek. *Naj bo ABC dani trikotnik in BC njegova najkrajša stranica. Potem je med vsemi daljicami, ki razdelijo trikotnik ABC na dela s ploščinama p_1 in p_2 ($p_1 \leq p_2$), najkrajša osnovnica XY enakokrakega trikotnika z vrhom A ter ogliščema X in Y na stranicah AB in AC. Daljica XY meri $2\sqrt{p_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, kjer je $\alpha = \angle BAC$.*

Sklenimo prispevek z nalogami.

1. Iz dane točke X na stranici AB trikotnika ABC nariši daljico XY, ki razpolavlja ploščino trikotnika.

2. Dan je trikotnik ABC s podatki $a = |BC|$, $b = |AC|$ in $c = |AB|$. Izrazi z a, b in c dolžino najkrajše daljice, ki razpolavlja ploščino trikotnika ABC, in to daljico tudi nariši.

3. Poišči najdaljšo daljico, ki razpolavlja ploščino danega trikotnika.

Boris Lavrič