PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **23** (1995/1996)
Številka 2
Strani 65–69

Olga Arnuš:

MATRIKE (ali skladišča informacij)

Ključne besede: matematika, linearna algebra, matrike, determinante.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/23/1259-Arnus.pdf

MATRIKE
(ali skladišča informacij)

Gospa Korenčkova je nameravala kupiti 3kg jabolk in 2kg pomaranč. V prvi trgovini so bila jabolka po 120 SIT za kg, pomaranče pa po 150 SIT za kg. Sadje bi jo torej stalo $3 \cdot 120$ SIT $+ 2 \cdot 150$ SIT $= 660$ SIT. V zgoščeni obliki bi zgornje podatke zapisali v dveh stolpcih:

	količina	cena
jabolka	3	120
pomaranče	2	150

Dogovorimo se, da bomo oba stolpca zapisali v oglatih oklepajih. Skupni strošek za sadje smo dobili s preprostim gospodinjskim računom, ki mu bomo rekli skalarno množenje:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 150 \end{bmatrix} = 3 \cdot 120 + 2 \cdot 150 = 660.$$

V splošnem zapišemo ta račun takole:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Gospa Korenčkova je pogledala še v drugo trgovino. Tam so bila jabolka po 110 SIT, pomaranče pa po 160 SIT za kg. Skupni strošek bi bil $3 \cdot 110 + 2 \cdot 160 = 650$, torej manjši kot v prvi trgovini. Podatke o cenah lahko spravimo v tabelo:

	jabolka	pomaranče
trgovina 1	120	150
trgovina 2	110	160

Taki tabeli števil rečemo v matematiki matrika. Običajno jo zapišemo med oglata oklepaja ali pa med dve dvojni navpični črti. Zgornja matrika ima dve vrstici in dva stolpca (matrika reda 2×2). Število vrstic ni nujno enako številu stolpcev. Tudi eno vrstico ali stolpec bomo šteli k matrikam.

Vse dosedanje gospodinjske podatke gospe Korenčkove lahko zapišemo z dvema matrikama: prva zgoščeno prikazuje cene v obeh trgovinah, druga pa nakupne količine. Iz teh podatkov lahko izračunamo zneska za obe trgovini. Tudi ti dve števili lahko zložimo v stolpec:

$$\begin{bmatrix} 120, & 150 \\ 110, & 160 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \cdot 3 + 150 \cdot 2 \\ 110 \cdot 3 + 160 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 660 \\ 650 \end{bmatrix}.$$

Izvedli smo neko operacijo, ki je matriki in stolpcu priredila nov stolpec. To je poseben primer operacije, ki jo imenujemo množenje matrik.

Denimo, da imamo opravka še z gospo Peteršiljčkovo, ki je nameravala kupiti 1kg jabolk in 2kg pomaranč. Za prikaz vseh količin obeh gospodinj potrebujemo matriko reda 2×2:

$$\begin{array}{ll} \text{jabolka} & \multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 3, & 1 \\ 2, & 2 \end{bmatrix}.$} \\ \text{pomaranče} & \end{array}$$

Drugi stolpec se nanaša na gospo Peteršiljčkovo. Primerjavo zneskov za obe gospodinji in obe trgovini nam da naslednji račun z matrikami:

$$\begin{bmatrix} 120, & 150 \\ 110, & 160 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3, & 1 \\ 2, & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 120 \cdot 3 + 150 \cdot 2, & 120 \cdot 1 + 150 \cdot 2 \\ 110 \cdot 3 + 160 \cdot 2, & 110 \cdot 1 + 160 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 660, & 420 \\ 650, & 430 \end{bmatrix}.$$

Drugi stolpec nam pove, da se gospe Peteršiljčkovi bolj izplača kupiti sadje v prvi trgovini.

Iz primera vidimo, da matrike množimo tako, da skalarno množimo vrstice iz prve matrike s stolpci iz druge matrike (skalarni produkt j-te vrstice prve matrike in k-tega stolpca druge matrike je v rezultatu število, ki leži v j-ti vrstici in k-tem stolpcu). Bralec naj premisli, kakšen pogoj mora veljati za dimenzije dveh matrik, da ju je mogoče zmnožiti.

Matrika torej predstavlja zgoščeno informacijo. Ta je skrita v številih in v položaju števil v tabeli. V našem primeru je 120 cena, prva vrstica pove, da gre za jabolka, prvi stolpec pa, da se cena nanaša na prvo trgovino. Dve matriki sta enaki natanko tedaj, ko se ujemata v istoležnih številih. Namesto številnih razmetanih računov nam množenje matrik v zgoščeni in urejeni obliki prikaže primerjavo zneskov. Množenje matrik, ki smo ga spoznali na našem primeru, je samo ena od možnih operacij z matrikami. Lahko jih na primer tudi seštevamo ali pa množimo s številom.

Oglejmo si še, kakšna pravila veljajo za to množenje matrik. Omejili se bomo na matrike 2×2.

1. Zelo pomembno lastnost množenja odkrijemo, če zmnožimo na primer

$$\begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2, & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2, & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7, & 4 \\ 15, & 11 \end{bmatrix},$$

nato pa še

$$\begin{bmatrix} 3, & 2 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3, & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3, & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9, & 16 \\ 5, & 9 \end{bmatrix}.$$

Množenje matrik torej ni komutativno.

2. Nekoliko daljši račun bi bil potreben za dokaz asociativnosti. Če tri poljubne matrike označimo z A, B in C, to pomeni $(AB)C = A(BC)$. Bralec naj to opravi sam.

3. Prav posebno vlogo ima matrika $I = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$. Če jo množimo s katerokoli matriko $A = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}$ (z leve ali z desne), dobimo kar matriko A. Tako lastnost ima pri množenju števil število 1.

4. V množici realnih števil lahko za vsako število $a \neq 0$ najdemo tako število b, da je $ab = 1$ ali $b = a^{-1}$ ali $b = 1 : a$ (inverzna vrednost števila a). Ali je to mogoče tudi v množici matrik? Namesto števila 1 bomo seveda vzeli matriko I. Matriki $A = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}$ bi radi priredili tako matriko $B = \begin{bmatrix} x, & y \\ u, & v \end{bmatrix}$, da bo $AB = I$ ali

$$\begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x, & y \\ u, & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

To nas privede do sistema enačb:

$$ax + bu = 1, \quad ay + bv = 0$$
$$cx + du = 0, \quad cy + dv = 1$$

z rešitvijo

$$x = \frac{d}{ad-bc}, \; y = \frac{-b}{ad-bc}, \; u = \frac{-c}{ad-bc}, \; v = \frac{a}{ad-bc}.$$

Rešitev seveda obstaja, če je število $ad - bc$ različno od nič. Imenujemo ga determinanta D matrike $A = \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix}$. Če je torej $D \neq 0$, je matrika

$$B = \begin{bmatrix} \frac{d}{D} & \frac{-b}{D} \\ \frac{-c}{D} & \frac{a}{D} \end{bmatrix}$$

inverzna matrika matrike A ali $AB = I$. Bralec se lahko prepriča, da je tedaj tudi $BA = I$. Zato je smiselna oznaka $B = A^{-1}$. Za matrike, ki imajo determinanto enako nič, pravimo, da niso obrnljive.

Omenjena pravila pomagajo pri reševanju nekaterih matričnih enačb. Naj bosta na primer dani matriki $A = \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 5, & 3 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 4, & 1 \\ 3, & 2 \end{bmatrix}$. Zanima nas taka matrika X, da bo $AX = B$. Da bi izračunali X, bi morali enačbo "deliti" z A, kar pa pomeni množiti z inverzno vrednostjo, če ta seveda obstaja. Zaradi nekomutativnosti množenja moramo paziti na vrstni red faktorjev, v našem primeru moramo z leve strani množiti obe strani enačbe z A^{-1} (da bosta faktorja A^{-1} in A skupaj):

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Upoštevamo asociativnost množenja:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Od tod

$$IX = A^{-1}B \qquad \text{in} \qquad X = A^{-1}B.$$

V danem primeru je determinanta $D = 2\cdot3-5\cdot1 = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3, & -1 \\ -5, & 2 \end{bmatrix}$ in

$$X = \begin{bmatrix} 3, & -1 \\ -5, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4, & 1 \\ 3, & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9, & 1 \\ -14, & -1 \end{bmatrix}.$$

Zaradi nekomutativnosti množenja ima enačba $XA = B$ drugačno rešitev. Tu je treba z A^{-1} množiti z desne (vaja za bralca).