PENROSE – ESCHER – REUTESWÄRD

Zapeljevanje

Nizozemskega grafika M. C. Eschera (1898 – 1972) smo v Preseku že spoznali. Nobena skrivnost ni, da se je Escher pri svojem umetniškem delu v veliki meri ukvarjal s problemi, ki so ponavadi bližje matematikom kakor pa ljudem iz umetniških krogov. Pri tem pa je Escher sam zmeraj dosledno zanikal kakršnokoli tesnejšo povezanost z matematično znanostjo.

Tako je precej svoje pozornosti namenil tudi študiju lastnosti trodimenzionalnega prostora in objektov v njem. V svojih zapisih za predavanja iz leta 1964 je Escher o tej temi med drugim tudi takole razmišljal: "Včasih se mi zdi, da smo ljudje kar preveč obremenjeni z neko notranjo težnjo priti kar se le da blizu nemogočemu in vsem njegovim skrivnostim. Kakor da bi se nam realnost okoli nas, ves ta trodimenzionalni svet, ki nas obdaja, zdela preveč navadna, preveč dolgočasna in vsakdanja. Hrepenimo po nadnaravnem ali celo supernaravnem, po tem, kar ne obstaja, torej po čudežu.

Kakor da bi ta vsakodnevna realnost ne bila že sama po sebi dovolj zagonetna.

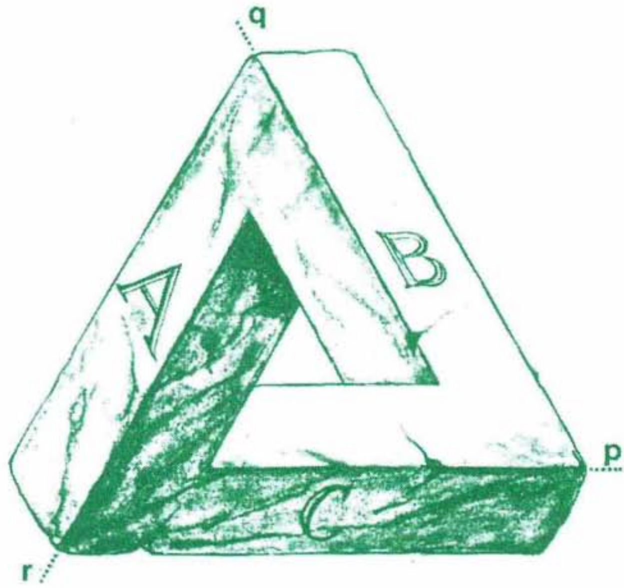
Saj se prav vsakemu izmed nas lahko pripeti, da kdaj povsem nepričakovano ujame trenutek, v katerem se sreča z impulzi, ki izvirajo iz same srži vsakdanjega življenja in realnosti. V mislih imam trenutek, ko postanemo občutljivi tudi za nerazložljivo, tudi za čudesa okoli nas. Gre preprosto za nekak čudež tega trodimenzionalnega prostora, v katerem živimo in skozi katerega se premikamo skorajda povsem rutinsko; včasih se nam namreč prostor sam po sebi razkrije na zares osupljiv način.

Večkrat se mi je na mojih dolgih samotnih sprehodih skozi gozd okoli Baarna primerilo, da je kar nenadoma izginila tišina okrog mene. In ves navdušen sem obstal, takorekoč iz oči v oči s povsem nerealnim in neobrazložljivim. Tedaj sem natanko začutil, kako zagonetna je pravzaprav ta razdalja med menoj in, recimo, drevesi okoli mene in koliko presenetljivega skriva v sebi prostor, v katerem stojim.

Prostora preprosto ne poznamo. Ne moremo ga videti, ne moremo ga slišati, niti občutiti. Stojimo sredi njega, smo celo del tega prostora, pa o njem samem vendarle ničesar ne vemo. Seveda lahko, recimo, izmerim razdaljo med seboj in bližnjim drevesom. Toda ko rečem: "Trije metri," mi to število z ničemer ne razkrije skrivnostnosti prostora. V prostoru lahko vidimo zgolj meje in obrise, prostora samega po sebi pa žal ne."

Penrose

Leta 1958 je znameniti angleški fizik, astronom in matematik Roger Penrose (roj. 1932) objavil skupaj s svojim očetom v reviji British Yournal of Psychology članek, v katerem je predstavil nekaj t.i. *nemogočih predmetov.* Na sliki 1 vidimo le enega izmed njih. Poslej ga bomo imenovali kar *Penrosov trikotnik*, čeprav bi bilo morebiti natančnejše poimenovanje zanj *Penrosov nemogoči model trikotnika.*



Slika 1.

Penrosov trikotnik je trodimenzionalna konstrukcija, ki je vsaj navidez sestavljena iz treh kvadrastih tramov. Vendar pa se nam že samo ob pogledu nanj, torej brez kakšnih dodatnih pojasnil, zazdi, da tak predmet v resnici najbrž sploh ne obstaja. Seveda se lahko eksistenci tega predmeta postavimo po robu tudi s povsem resnimi, matematično zasnovanimi argumenti. Oglejmo si jih nekaj:

1) Očitno je, da leži tram C (glej risbo) vodoravno in da se nam tram A približuje, tram B pa oddaljuje, če ju spremljamo od njunega stika s C proti drugemu koncu. Povsem nemogoče je torej, da bi se tramova A in B sploh kdajkoli staknila, kakor prikazuje risba.

2) Konstrukcijo si lahko zamislimo v dvodimenzionalnem prostoru kot model trikotnika, čigar stranice ponazarjajo tramovi A, B in C. Na risbi lahko lepo opazimo, da stojijo tramovi med seboj pravokotno. To pomeni, da bi bila vsota notranjih kotov tega trikotnika $270°$. Seveda vemo, da kaj takega ni mogoče.

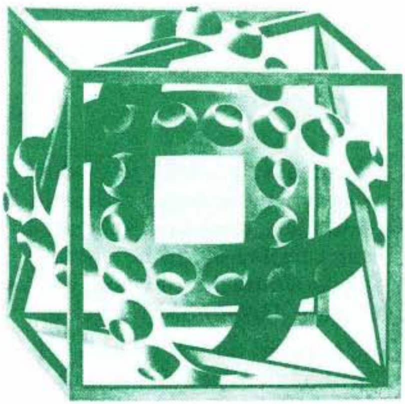
3) V tretje pa se oprimo na znanje stereometrije. Zamislimo si, da je na vsaki izmed stranskih ploskev tramov, ki jih označujejo na sliki najsvetlejša ploskev (B), nekoliko temnejša ploskev (A) in najtemnejša ploskev (C), položene ravnine. Na ploskvi B naj bo to ravnina Σ_B, na ploskvi A naj leži ravnina Σ_A, na ploskvi C pa ravnina Σ_C. Premice, v katerih se sečeta po dve ravnini, označimo takole:

$$\Sigma_C \cap \Sigma_B = p, \qquad \Sigma_B \cap \Sigma_A = q, \qquad \Sigma_A \cap \Sigma_C = r.$$

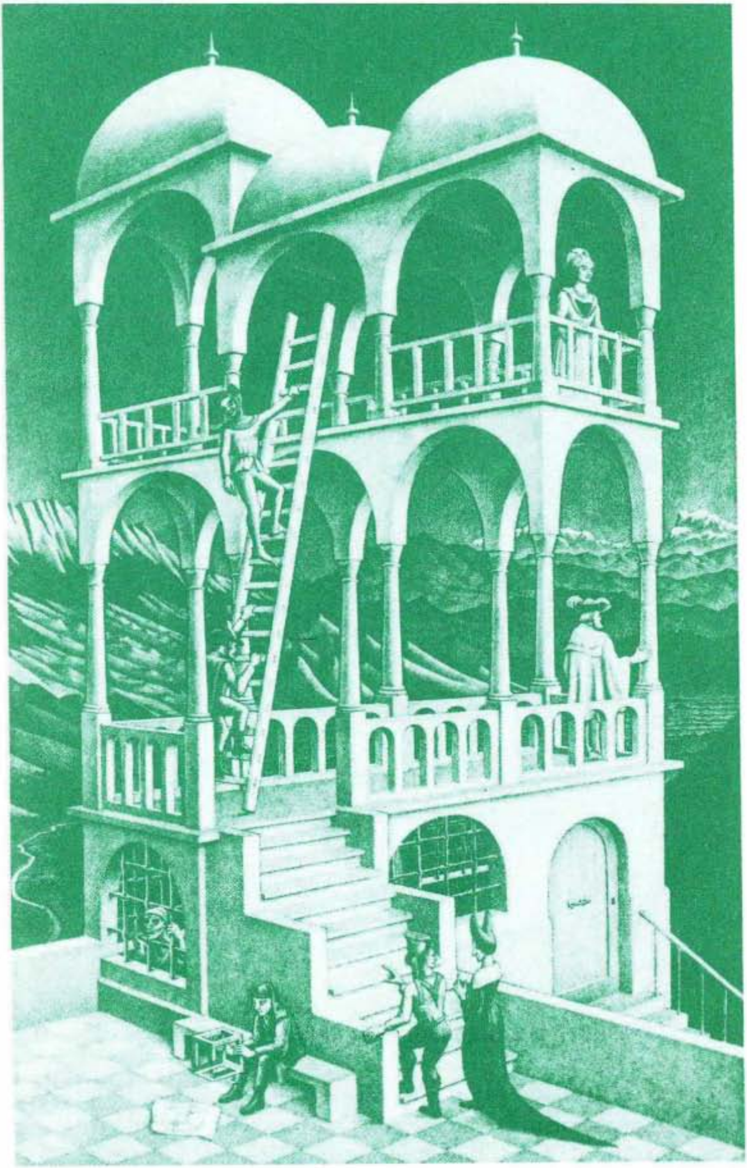
Z risbe se da lepo razbrati, da so ravnine Σ_A, Σ_B in Σ_C paroma nevzporedne. Iz teorije vemo, da se tri takšne ravnine sečejo zmeraj v natanko eni točki. Vendar pa to v primeru ravnin na ploskvah Penrosovega trikotnika ni res, saj se premice p, q in r sečejo v treh različnih točkah. Obstoj tega predmeta bi nas torej znova privedel do logičnega protislovja.

Escher

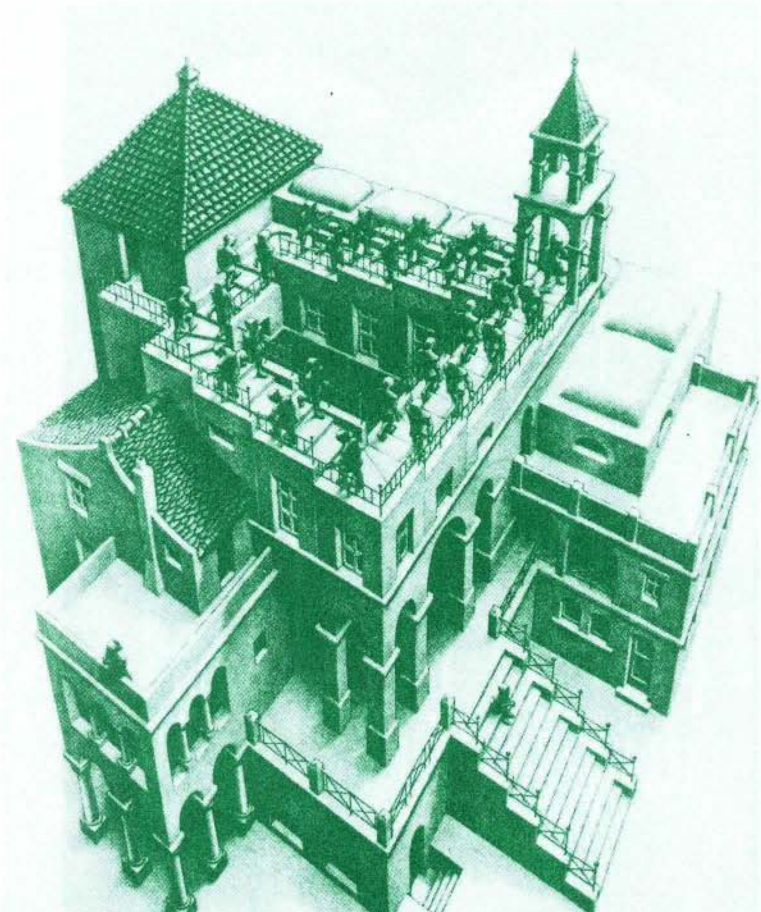
V času, ko je bil objavljen Penrosov članek, se je Escher tudi že sam ukvarjal z risanjem nemogočih predmetov. Tako je imel tedaj za seboj že *Kocko z magičnimi trakovi*, 1957 (slika 2). In prav Penrosovi nemogoči predmeti so Escherju pomenili precejšnjo pomoč in vzpodbudo pri nadaljevanju tovrstnih raziskav. Tako je po branju že omenjenega Penrosovega članka v kratkem izdelal še tri litografije (slike 3, 4, 5).



Slika 2. Kocka z magičnim trakom

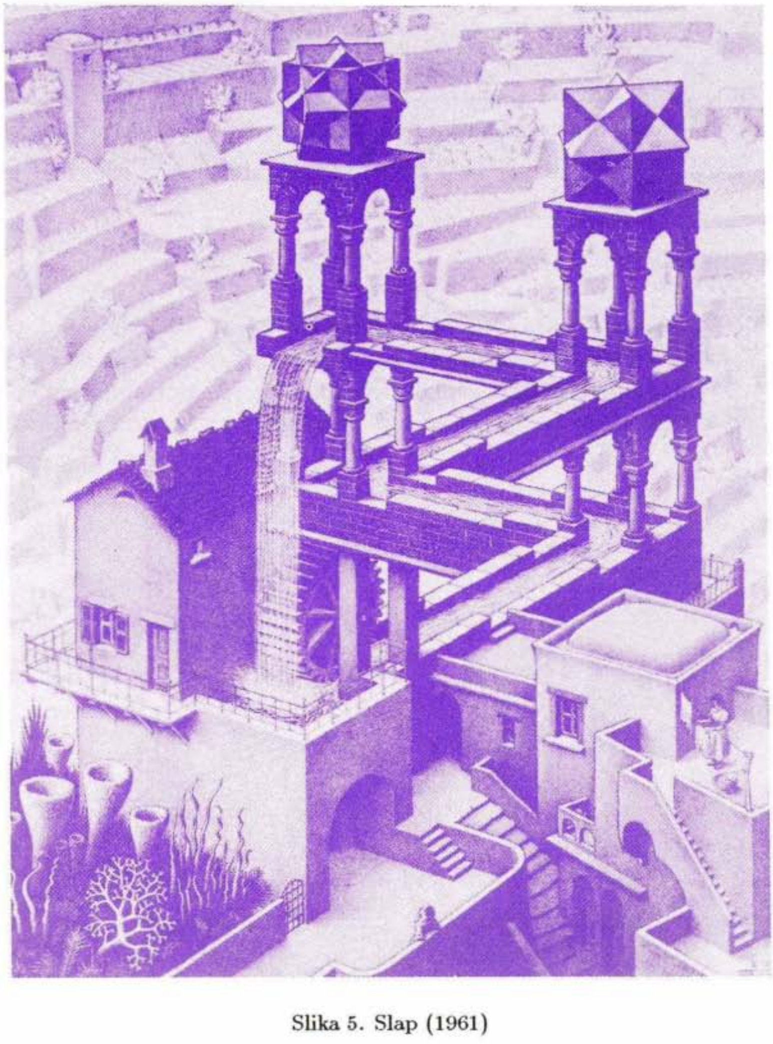


Slika 3. Belvedere (1958)



Slika 4. Po stopnicah navzgor in navzdol (1960)

S *Slapom* se bomo sedaj poskušali seznaniti nekoliko podrobneje. Že ob pogledu nanj zaslutimo, da verjetno ponazarja problem, ki je v osnovi zelo soroden s tistim, ki ga gledalcu ponuja Penrosov trikotnik. Znano je, da je Escher v izdelavo te grafike vložil ogromno truda. Pred njo je izdelal dolgo vrsto risb s samimi nemogočimi predmeti. In naposled mu je v končni verziji uspelo nekaj zares izjemnega. Poleg tega, da je skonstruiral



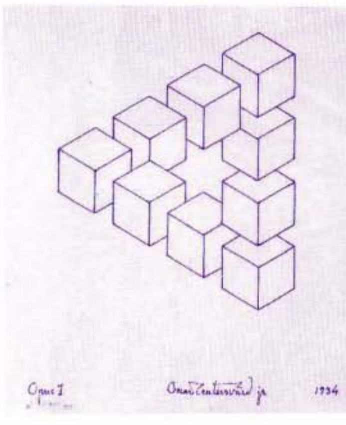
Slika 5. Slap (1961)

objekt, ki je v realnem nemogoč že iz povsem geometrijskih razlogov, je njegovo zagonetnost podkrepil še s fizikalnega vidika. Ker teče voda na risbi po kanalih navzgor "kar sama od sebe" in ker je ta njen tok očitno večen, je Escherju hkrati uspelo skonstruirati tudi svojevrsten perpetuum mobile (večno gibalo). Znano pa je, da je obstoj takšnega predmeta (sistema) v hudem nasprotju z nekaterimi osnovnimi fizikalnimi zakoni.

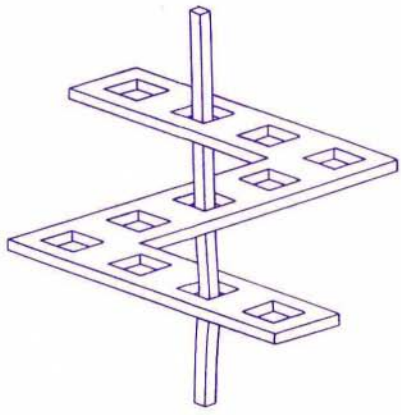
Na vrhu vsakega izmed obeh stolpov opazimo še dodatno zanimivost. Gre za dva velika poliedra, ki ju sicer nekoliko redkeje srečujemo. Levi predstavlja tri sekajoče se kocke, desni pa par sekajočih se oktaedrov. Escher je dejal, ko je komentiral to svoje delo, da poliedra na tej sliki nimata nobenega prav posebnega pomena in da ju je narisal pač preprosto zato, ker so ga poliedri zmeraj zanimali in se je z njimi že od vsega začetka rad ukvarjal.

Reuteswärd

Risba na sliki 6 nam kaže enega izmed več tisoč (!) nemogočih predmetov, ki jih je uspel skonstruirati švedski grafik Oscar Reuteswärd (roj. 1915). Lahko jo razumemo tudi kot pojasnilo k Escherjevemu Slapu. Njegova pa je tudi sedaj že kar znamenita nemogoča konstrukcija na sliki 7.



Slika 6.

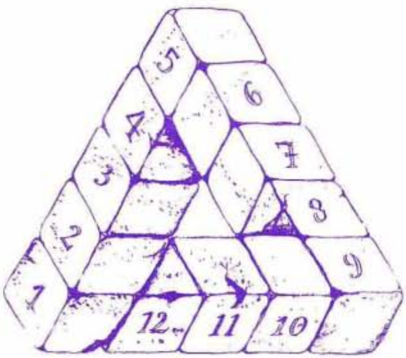


Slika 7.

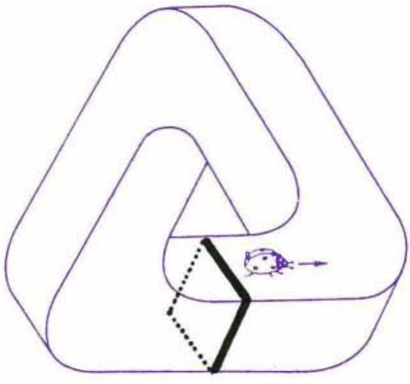
Domača naloga

Za konec si oglejmo še nekaj zanimivih problemov, ki so povezani s Penrosovim trikotnikom.

1) Recimo, da bi nam uspelo sestaviti Penrosov trikotnik iz dvanajstih kock, kjer ima vsaka izmed njih rob z dolžino 1 dm (slika 8). Potem bi lahko seveda govorili tudi o "prostornini" in o "površini" tako nastalega telesa. Ali ju znate izračunati?



Slika 8.



Slika 9.

2) Recimo, da bi nam uspelo zgraditi poseben Penrosov trikotnik z zaobljenimi robovi (slika 9). Po njem naj beži še pikapolonica, ki pa se giblje zmeraj le naprej in nikdar ne zaide čez nobenega izmed robov tega trikotnika. Poleg tega naj bo na nekem mestu tega telesa zarisan sklenjen obroč, kakor kaže slika. Povejte – najmanj kolikokrat bi morala pikapolonica steči čez obroč, če bi hotela priti spet nazaj na svoje izhodiščno mesto!

3) In kako pojasniti **fotografijo** na naslovni strani Preseka? Mar ta fotografija ne zanika tega, kar smo v tem članku zvedeli o nemogočih predmetih?

Nadaljnje branje

1) Gardner Martin: *Aha! pa te imam*, Ljubljana, DZS, 1988,
2) Smullyan Raymond: *Poznate naslov te knjige?*, Ljubljana, DZS, 1987.

Vilko Domajnko

TRIKOTNIKI S POSEBNO LASTNOSTJO

Iz oglišča A trikotnika ABC narišemo kotno simetralo, iz B težiščnico k stranici $\overline{AC}$ in iz C višino na stranico $\overline{AB}$. Dokaži, da gredo te tri premice skozi isto točko natanko tedaj, kadar razdeli višina iz oglišča C stranico $\overline{AB}$ v razmerju stranic $\overline{AC} : \overline{AB}$.

Ivan Vidav