PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **23** (1995/1996)
Številka 1
Strani 40–45

Anton Cedilnik:

GEOMETRIJSKA IN HARMONIČNA VRSTA

Ključne besede: matematika, analiza, številske vrste.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/23/1252-Cedilnik.pdf

GEOMETRIJSKA IN HARMONIČNA VRSTA

Seštevanje realnih števil je po definiciji preslikava

$$x, y \rightarrow x + y,$$

ki paru dveh (poljubnih) realnih števil priredi tretje, njuno **vsoto**; množica realnih števil je za to operacijo komutativna grupa, pri čemer je enota število 0, nasprotni element števila z pa je $-z$.

Seštevanje je potemtakem seštevanje **dveh** števil. Ker velja zakon asociativnosti, lahko vsoto posplošimo tako, da je v njej poljubno mnogo sumandov:

$$x_1 + x_2 + x_3 := (x_1 + x_2) + x_3,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 := (x_1 + x_2 + x_3) + x_4$$

in tako naprej. V vsakem primeru pa je v vsoti le **končno število** členov.

Če je v vsoti veliko členov, ji včasih rečemo **končna vrsta** in uvedemo zanjo poseben simbol:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n =: \sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{1}$$

Znak za seštevanje je podan z veliko grško črko sigma, ki označuje isti glas kot latinski S in namiguje na začetnico latinske besede *summa* = vsota.

Nekaj preprostih primerov:

$$\sum_{k=1}^{n} a = a + a + \cdots + a = na.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2.$$

$$\sum_{k=0}^{n}(a + kd) = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + nd) = (n + 1)(a + nd/2)$$

(vsota **aritmetičnega** zaporedja).

$$\sum_{k=0}^{n} ap^k = a + ap + ap^2 + \cdots + ap^n = a(1 - p^{n+1})/(1 - p) \tag{2}$$

(vsota **geometrijskega** zaporedja).

Matematika pa gre še dlje in uvede **neskončno vrsto** (ali kar **vrsto**): vzamemo neskončno zaporedje $x_1, x_2, x_3, \ldots$ realnih števil in iz njega naredimo

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k. \tag{3}$$

Seveda pa je tej reči najprej treba dati vsebino. Če so vsi členi od nekega mesta dalje enaki 0, naj bo to kar običajna vsota, npr.:

$$x_1 + \cdots + x_m + 0 + 0 + \cdots := x_1 + \cdots + x_m.$$

Če pa niso, pač ravnamo "po občutku", vzamemo računalnik in seštejemo, recimo, tisoč členov vrste (3); če pri tem ugotovimo, da so nadaljnji členi vrste že tako majhni, da jih pri računanju z računalnikom lahko zanemarimo, rezultat na ekranu razglasimo za **vsoto** ali **vrednost** vrste (3).

Zadnji stavek ni ravno vzor matematične natančnosti. Že zato ne, ker je vsota vrste tedaj odvisna od kvalitete računalnika. Poskusimo biti zato malce bolj objektivni! Uvedimo **delne vsote** vrste (3):

$$s_1 := x_1, \quad s_2 := x_1 + x_2, \quad s_3 := x_1 + x_2 + x_3, \ldots$$

Na splošno torej velja:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Sedaj pa recimo: Število S je vsota vrste (3):

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \tag{4}$$

če se vse delne vsote z dovolj velikimi indeksi razlikujejo od S za tako malo, kot le hočemo. Če je torej indeks n delne vsote s_n res zelo velik, je razlika $|S - s_n|$ manjša od še tako majhne vnaprej postavljene vrednosti. To simbolično zapišemo takole:

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n \tag{5}$$

in preberemo: "S je **limita** zaporedja delnih vsot" ali "Delne vsote **konvergirajo** k S", ali tudi: "Delne vsote gredo k številu S". Simbol lim je okrajšava latinske besede *limes*, ki v dobesednem prevodu pomeni mejo.

Že iz definicije same sledi, da vrste nimajo zmeraj vsote. Če se namreč vse delne vsote z dovolj velikimi indeksi ločijo od vsote vrste za poljubno malo, se tudi med seboj ločijo največ za dvakratni "poljubno malo". Ker pa se zaporedni delni vsoti s_{n-1} in s_n ločita ravno za x_n, je potemtakem člen x_n z dovolj velikim indeksom n nujno zelo blizu 0. Sklepamo tedaj, da če vrsta (3) ima vsoto, nujno velja:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0. \tag{6}$$

Tako npr. vrsta $1 + 1 + 1 + \ldots$ nima vsote.

Pravzaprav je na mestu vprašanje, ali sploh ima kakšna vrsta s pretežno neničelnimi členi svojo vsoto.

Zanimivo je, da so se s tem vprašanjem srečali že antični Grki. Slavni Zenonov paradoks govori ravno o tem. Ustrelimo proti tarči (v originalni verziji paradoksa z Ahilom lovimo želvo); izstrelek najprej preleti pol poti, potem pol od polovice, potem še pol od polovice od polovice, pa tako naprej brez konca. No, in prav zato, ker preletavanje polovičk nima konca, izstrelek morda nikoli ne prileti do tarče. Dejansko se sprašujemo, ali ima vrsta

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \tag{7}$$

svojo vrednost. Zdrava pamet nas uči, da jo mora imeti in da je ta vsota enaka 1 (to je, cela pot). Vendar ne smemo zato misliti, da je bil Zenon malce pregloboko pogledal v kozarec. Prav nasprotno je res: dejstvo, da je opazil problem v sicer tako samoumevnem pojavu, jasno kaže na njegove izjemne intelektualne sposobnosti.

Geometrijska vrsta je

$$a + ap + ap^2 + ap^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} ap^k.$$

Delno vsoto s_n imamo že v (2). Recimo, da je $-1 < p < 1$. Kaj se dogaja s p^{n+1}, ko n raste preko vseh mej? Natančen račun je nekoliko dolg, za silo pa se da to ugotoviti tudi z računalnikom. Odtipkajmo katerokoli število med -1 in 1 in pritiskajmo tipko kvadriranje. Primer:

$$0,990000 \boxed{x^2} \ 0,980100 \boxed{x^2} \ 0,960596 \boxed{x^2} \ 0,922745 \boxed{x^2} \ 0,851458 \boxed{x^2}$$
$$0,724980 \boxed{x^2} \ 0,525596 \boxed{x^2} \ 0,276252 \boxed{x^2} \ 0,076315 \boxed{x^2} \ 0,005824 \boxed{x^2}$$
$$0,000034 \boxed{x^2} \ 0,000000$$

Torej je $0,99^{2048} = 0$ na vsaj 6 decimalk.

Tako eksperimentiranje z žepnim računalnikom ni vselej zanesljivo, v tem primeru pa je dobra osnova za (pravilno!) domnevo:

$$\lim_{n \to \infty} p^{n+1} = 0.$$

Od tod in iz (2) lahko sklepamo, da velja:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ap^k = \frac{a}{1-p}. \tag{8}$$

V (7) je $a = p = \frac{1}{2}$ in rezultat je res 1.

Če pa ne velja $-1 < p < 1$, geometrijska vrsta nima vsote; precej očitno je, da (6) tedaj ne velja.

Ali je res pogoj (6) tisti, ki odloča o tem, ali bo vrsta imela vsoto ali ne? Glede na to, kako smo ga dobili (torej iz predpostavke, da vrsta ima vsoto), je pogoj (6) **potreben**, če naj vrsta ima vsoto. **Zadosten** pa ni.

Harmonična vrsta

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{9}$$

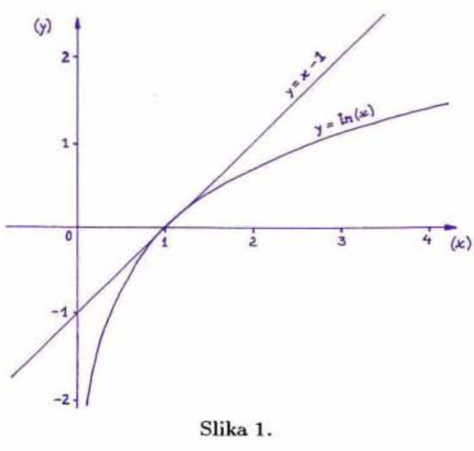
ima izpolnjen pogoj (6), saj se členi res manjšajo in so vse bliže 0. Pokazali pa bomo, da nima vsote. Drugače rečeno, če bi sešteli dovolj členov harmonične vrste, bi dobili poljubno velik rezultat.

V ta namen še malo eksperimentirajmo z žepnim računalnikom. Izberimo si poljuben pozitiven x in izračunajmo števili $x-1$ ter $\ln(x)$ (naravni logaritem, torej logaritem z osnovo e). Hitro opazimo, da je $\ln(x)$ vedno manjši od $x-1$, razen za $x=1$, ko sta oba izraza enaka 0. Tako je npr.: $1 = 2-1 > \ln(2) = 0,693; -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 > \ln(\frac{1}{2}) = -0,693$. Imejmo to za eksperimentalni dokaz ocene

$$\ln(x) \leq x - 1 \quad (x > 0). \tag{10}$$

S posebnim postopkom, ki se mu reče **odvajanje**, se da (10) tudi strogo dokazati.

Če narišemo grafa funkcij $x-1$ in $\ln(x)$, dobi (10) preprosto vsebino: krivulja $y = \ln(x)$ ima premico $y = x-1$ za tangento pri $x=1$, pri čemer je - razen v dotikališču - premica nad logaritemsko krivuljo.



Slika 1.

Uporabimo (10)! Naj bo k naravno število, večje od 1.

$$\ln(k-1) = \ln(k(1-\frac{1}{k})) = \ln(k) + \ln(1-\frac{1}{k}) \leq \ln(k) - \frac{1}{k}.$$

Od tod:

$$\ln(1) \leq \ln(2) - \frac{1}{2} \leq \ln(3) - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \leq \cdots \leq \ln(n) - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} - \cdots - \frac{1}{2}.$$

Če povežemo le začetek in konec izpeljave, dobimo:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln(n) + 1. \tag{11}$$

Ponovno uporabimo (10), tokrat za $k \geq 1$.

$$\ln(k+1) = \ln(k(1+\frac{1}{k})) = \ln(k) + \ln(1+\frac{1}{k}) \leq \ln(k) + \frac{1}{k}.$$

$\ln(n) \leq \ln(n-1) + \frac{1}{n-1} \leq \ln(n-2) + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \leq \cdots \leq \ln(1) + \frac{1}{1} + \cdots +$ $+ \frac{1}{n-1}$, kar nam da:

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}. \tag{12}$$

Delna vsota $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ harmonične vrste je torej vkleščena med meji

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq s_n \leq \ln(n) + 1. \tag{13}$$

Ker z neomejeno naraščajočim n raste preko vseh mej tudi njegov logaritem $\ln(n)$ (čeprav res mnogo počasneje), pa (13) pove, da tudi delne vsote harmonične vrste neomejeno rastejo. Potemtakem harmonična vrsta nima vsote.

Ocena (13) se da za velike n izboljšati. Precej zahtevna izpeljava namreč pokaže, da za dovolj velik n velja poljubno natančno:

$$s_n \approx \ln(n) + C,$$

kar lahko zapišemo tudi takole:

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - \ln(n)) = C. \tag{14}$$

Pri tem je $C = 0,57721566...$ **Eulerjeva konstanta**, ravno tak čuden spak, kot sta števili $\pi = 3,14159...$ ali $e = 2,71828...$